Sol A3. Calculs algébriques

Solution A3.1

M1 par récurrence.

M2 Soit $n > 1$. $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\dfrac{1}{k(k^2-1)} = \dfrac{1/2}{k-1} + \dfrac{-1}{k} + \dfrac{1/2}{k+1}$ (facile à vérifier, mais si on ne l'a jamais rencontré, la première méthode est préférable).

Puis on met en lumière deux télescopages :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1/2}{k-1} + \frac{-1}{k} + \frac{1/2}{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1/2}{k-1} - \frac{1/2}{k}\right) + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1/2}{k+1} - \frac{1/2}{k}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1/2}{n} + \frac{1/2}{n+1} - \frac{1/2}{2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} \\ &= \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}.\end{aligned}$$

Solution A3.6

1. Voir TD A1.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor \frac{2x}{2^{k+1}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor \right) \text{ d'après la question précédente.}\end{aligned}$$

On reconnaît un télescopage. Ainsi $\boxed{S = \left\lfloor \dfrac{2x}{2^{n+1}} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor}$.

L'intérêt de ce résultat grandit lorsqu'on examine sa limite : cette somme tend, quand n tend vers $+\infty$, vers $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor$.

Solution A3.16

Soit $n \in \mathbb{N}$. On va décomposer $[\![0, n^2-1]\!] = \{0\} \cup [\![1, 3]\!] \cup [\![4, 8]\!] \cup \ldots$. Autrement dit

$$[\![0, n^2-1]\!] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [\![i^2, (i+1)^2 - 1]\!].$$

Or pour $i \in [\![0, n^2-1 : \forall k \in [\![i^2, (i+1)^2-1]\!]$, $\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = i$.
En effet $i^2 \leqslant k < (i+1)^2$, d'où $i \leqslant k < i+1$.
Ainsi

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} ((i+1)^2 - i^2) i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) i \\
&= 2 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

La simplification est laissée au lecteur.