

Les résultats devront être **encadrés**.

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

### Problème 1

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'objet de ce problème est de calculer de plusieurs manières la somme

$$S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}.$$

1. Première approche

(a) Montrer que pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ .

(b) En déduire la valeur de  $S$ .

2. Deuxième approche : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , soit  $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ .

(a) Donner une expression simple de  $f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

(b) On admet que la fonction  $f$  ainsi définie est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , exprimer  $f'(x)$  de deux manières différentes.

(c) En déduire la valeur de  $S$ .

3. Deuxième approche, bis : on définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $g : x \mapsto (1 + e^x)^n$ , que l'on suppose dérivable.

(a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , donner une expression développée de  $g(x)$ .

(b) En déduire deux expressions différentes de la dérivée de  $g$ .

(c) En déduire la valeur de  $S$ .

4. Troisième approche

(a) Établir pour tout  $1 \leq k \leq n+1$  la formule :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

(b) En déduire par récurrence que  $S = n2^{n-1}$ .

5. Quatrième approche

(a) Après avoir justifié que  $S = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ , appliquer le changement d'indice  $j = n - k$  pour obtenir une équation vérifiée par  $S$ .

(b) En déduire la valeur de  $S$ .

6. En imitant une des méthodes précédentes, montrer que pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

**Problème 2**

Dans ce problème, pour tout nombre réel  $x$ , on note  $|x|$  la **valeur absolue** de  $x$ , définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .
2. Montrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 2$  et tous réels  $x_1, \dots, x_n$ ,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Le but de cette partie est de montrer par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la propriété  $\mathcal{P}(n)$  :

$$\text{Pour tous nombres réels } a_1, \dots, a_n \text{ et } b_1, \dots, b_n, \text{ on a } \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \times \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

3. Démontrer  $\mathcal{P}(1)$ .
4. Soit  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  des nombres réels.
  - (a) Montrer que  $\alpha_2^2 \beta_1^2 + \alpha_1^2 \beta_2^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \geq 0$ .
  - (b) En déduire  $\mathcal{P}(2)$ .
5. Soit  $n \geq 2$  un nombre entier. On suppose que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.  
Soit maintenant  $a_1, \dots, a_{n+1}$  et  $b_1, \dots, b_{n+1}$  des nombres réels.

- (a) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2} + |a_{n+1}| |b_{n+1}|.$$

- (b) En utilisant judicieusement la propriété  $\mathcal{P}(2)$ , en déduire que

$$\left( \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right) \times \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right).$$

- (c) Montrer que la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie et conclure.

**Problème 3**

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . On rappelle les formules suivantes.

➤ Formules de linéarisation :

$$\begin{aligned} \bullet \cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)), & \bullet \sin a \cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)). \\ \bullet \sin a \sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)), \end{aligned}$$

➤ Formules de factorisation : soit  $p, q \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \bullet \cos a + \cos b &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right), & \bullet \sin a + \sin b &= 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right), \\ \bullet \cos a - \cos b &= -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right), & \bullet \sin a - \sin b &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right). \end{aligned}$$

1. Soit  $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$  et  $x \in ]0, 2\pi[$ . On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$A_n = \sum_{k=1}^n \cos(kx + \varphi) \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^n \sin(kx + \psi).$$

- (a) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \varphi\right)$ .  
 (b) En déduire une expression analogue pour  $B_n$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère l'équation suivante d'inconnue  $x \in ]0, 2\pi[$  :

$$(E) : \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \sum_{k=1}^n \sin(kx).$$

2. (a) Déterminer des réels  $A$  et  $\delta$  tels que  $\forall X \in \mathbb{R}, \cos X - \sin X = A \cos(X + \delta)$ .  
 (b) Montrer que  $(E)$  est équivalente à l'équation

$$(F) : \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0.$$

3. (a) Résoudre l'équation  $(F)$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 (b) En déduire les solutions de  $(E)$  sur  $]0, 2\pi[$ .  
 4. Montrer que si  $n$  n'est pas un multiple de 4, alors  $(E)$  a exactement  $2n$  solutions sur  $]0, 2\pi[$ .