Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Première approche
   (a) Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Voir TD (formule du Chef).
   (b) Donc $S = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = \boxed{n2^{n-1}}$.
2. Deuxième approche : pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$.
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \boxed{(1+x)^n}$ (formule du binôme).
   (b) On admet que la fonction f ainsi définie est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a d'une part $\boxed{f'(x) = n(1+x)^{n-1}}$. D'autre part en dérivant la somme terme à terme, $\boxed{f'(x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}}$ (attention : le terme pour $k = 0$ est constant en x et donc s'annule en dérivant).
   (c) On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$. En évaluant en $x = 1$, on obtient $\boxed{S = n2^{n-1}}$.
3. Deuxième approche, bis : on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto (1+e^x)^n$, que l'on suppose dérivable.
   (a) Par la formule du binôme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{g(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^x)^k}$.
   (b) En dérivant la somme, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{g'(x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}e^x k(e^x)^{k-1}}$. Par ailleurs, en dérivant l'expression initiale, on obtient $\boxed{g'(x) = e^x n(1+e^x)^{n-1}}$.
   (c) On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}e^x k(e^x)^{k-1} = e^x n(1+e^x)^{n-1}$. En évaluant en $x = 0$, cela donne $\boxed{S = n2^{n-1}}$.
4. Troisième approche
   (a) La formule de Pascal donne : $\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}$. On peut aussi en adapter la démonstration et refaire le calcul.
   (b) **Init.** D'une part, $\sum_{k=1}^{1}k\binom{1}{k} = \binom{1}{1} = 1$. D'autre part, $1 \times 2^{1-1} = 1$. Donc la formule est vraie au rang 1.

$\boxed{\textbf{Hér.}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} k\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{nul pour } k=n+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n}{k-1}}_{\text{décalage}}\\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}}_{\text{H.R.}} + \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(k+1)\binom{n}{k}}_{\text{développement}}\\
&= n2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n} \underbrace{k\binom{n}{k}}_{\text{développement}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}_{\text{binôme}}\\
&= n2^{n-1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}}_{\text{H.R.}} + 2^n\\
&= n2^{n-1} + n2^{n-1} + 2^n\\
&= (n+1)2^n.
\end{aligned}$$

Ceci achève l'hérédité.

On a donc montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}}$.

5. Quatrième approche
   (a) Comme $0\binom{n}{0} = 0$, on a aussi $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. Le changement d'indice $j = n-k$ donne :
   $S = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}(n-j)\binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{n}(n-j)\binom{n}{j} = n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} - \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}$. Ainsi, $\boxed{S = n2^n - S}$.
   (b) Ainsi $2S = n2^n$, d'où $\boxed{S = n2^{n-1}}$.
6. Soit $n \geqslant 2$. Reprenons la deuxième approche et la fonction f dont on a calculé la dérivée :
   pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$. En dérivant une seconde fois, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f''(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2}$.
   Cela donne (en ajoutant le terme pour $k=1$ qui est nul puis en séparant la somme) :
   $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}x^{k-2} - \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-2}$.
   D'où, en évaluant en $x = 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} - \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$.
   Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n2^{n-2}(2+n-1)$.

Cela donne $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}}$.

Problème 2

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
   - Tout d'abord, $x \leqslant |x|$. En effet, soit $x = |x|$ (si $x \geqslant 0$), soit $x = -|x| \leqslant 0 \leqslant |x|$.
   - La même distinction donne aussi $-x \leqslant |x|$ ainsi que $y \leqslant |y|$ et $-y \leqslant |y|$.
   - Comme $x \leqslant |x|$ et $y \leqslant |y|$, $x + y \leqslant |x| + |y|$.
     Comme $-x \leqslant |x|$ et $-y \leqslant |y|$, $-(x + y) \leqslant |x| + |y|$.
   - Finalement $|x + y| = x + y$ ou $-(x + y)$. Dans les deux cas, on a $\boxed{|x + y| \leqslant |x| + |y|}$.
2. **Init.** Dans le cas $n = 2$, c'est la question .

   Hér. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On suppose que pour tous $x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

   Soit maintenant $x_1, \dots x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Alors $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right| = \left|\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + x_{n+1}\right|$.
   En utilisant le cas $n = 2$ avec $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ et x_{n+1}, on a $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| + |x_{n+1}|$.
   D'après l'hypothèse de récurrence, $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right) + |x_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|$, soit l'inégalité recherchée.

Le but de cette partie est de montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$\text{Pour tous nombres réels } a_1, \dots, a_n \text{ et } b_1, \dots, b_n, \text{ on a } \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

3. Pour tous $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, on a $(a_1 b_1)^2 = a_1^2 b_1^2$ donc *a fortiori* $\boxed{(a_1 b_1)^2 \leqslant a_1^2 b_1^2}$.
4. Soit $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ des nombres réels.
   (a) $\alpha_2^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 = (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)^2$ donc $\boxed{\alpha_2^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \geqslant 0}$.
   (b) Soit $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$.
   $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i\beta_i\right)^2 = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 = \alpha_1^2\beta_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_2^2\beta_2^2 \leqslant \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2^2$ d'après la question précédente.
   Or on constate que $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) = \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2^2$, ce qui montre $\mathcal{P}(2)$.
5. Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   Soit maintenant $a_1, \dots, a_{n+1}$ et $b_1, \dots, b_{n+1}$ des nombres réels.
   (a) L'hypothèse de récurrence, appliquée aux nombres $|a_i|$ et $|b_i|$, donne :
   $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)$ ou encore, toutes les quantités étant positives :

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2}$.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i| = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|\right) + |a_{n+1}||b_{n+1}| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2} + |a_{n+1}||b_{n+1}|$, ce qui montre l'inégalité souhaitée.

(b) En élevant au carré le résultat précédent, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i|\right)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2} + |a_{n+1}||b_{n+1}|\right)^2.$$

En utilisant la propriété de la question 4b avec $\alpha_1 = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2}$, $\beta_1 = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2}$, $\alpha_2 = |a_{n+1}|$ et $\beta_2 = |b_{n+1}|$, on obtient :

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i|\right)^2 \leqslant \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right) + |a_{n+1}|\right] \times \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right) + |b_{n+1}|\right],$$

soit enfin :

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n+1} |b_i|^2\right)}.$$

(c) Par l'inégalité triangulaire montrée en début de problème, on a : $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i|$, soit encore : $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n+1} |b_i|^2\right)$. Or bien sûr $|a_i|^2 = a_i^2$ et $|b_i|^2 = b_i^2$ pour tout i.

Finalement, $\boxed{\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i^2\right)}$.

Ceci achève la démonstration de $\mathcal{P}(n+1)$.

$\mathcal{P}(n)$ étant vraie pour $n = 1$ (question 3) et (on l'a achevé à l'instant par récurrence) pour tout $n \geqslant 2$, $\boxed{\text{elle est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$.

Problème 3

1. (a) Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ et $x \in]0, 2\pi[$. On montre par récurrence que la propriété suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n \ : \ A_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \varphi\right).$$

On remarque au passage que $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \neq 0$ *car* $\dfrac{x}{2} \in]0, \pi[$.

$\boxed{\textbf{Init.}}$ Pour $n = 1$, on a $A_n = \cos(x + \varphi)$ et :

$$\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \varphi\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos(x + \varphi) = \cos(x + \varphi).$$

Donc P_1 est vraie.

$\boxed{\textbf{Hér.}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose P_n vraie. On a alors, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + \cos((n+1)x + \varphi) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos((n+1)x + \varphi)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

D'après les formules de linéarisation, on obtient :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{\left[\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x + \varphi\right) - \sin\left(\frac{x}{2} + \varphi\right)\right] + \left[\sin\left(\left(n + \frac{3}{2}\right) x + \varphi\right) - \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x + \varphi\right)\right]}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{-\sin\left(\frac{x}{2} + \varphi\right) + \sin\left(\left(n + \frac{3}{2}\right) x + \varphi\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Finalement, d'après les formules de factorisation :

$$A_{n+1} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+2)x}{2} + \varphi\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

D'où le résultat, d'après le principe de récurrence.

(b) Soit $\psi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$. Comme $\forall y \in \mathbb{R} \sin y = \cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$, on a :

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx + \psi) = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(kx + \psi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ainsi, en appliquant le résultat précédent avec $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$B_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \psi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{B_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{(n+1)x}{2} + \psi\right)}.$$

2. (a) Soit $X \in \mathbb{R}$. On a $\cos X - \sin X = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos X - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin X\right) = \boxed{\sqrt{2} \cos\left(X + \frac{\pi}{4}\right)}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$. D'après les questions précédentes, avec $\varphi = \psi = 0$, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Enfin, comme $\forall X \in \mathbb{R} \cos X - \sin X = \sqrt{2}\cos\left(X + \frac{\pi}{4}\right)$, on en déduit

$$\boxed{(E) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0}.$$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0 &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ ou } \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \text{ ou } \frac{nx}{2} \equiv 0\,[\pi] \\
&\boxed{(F) \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2(n+1)} \left[\frac{2\pi}{n+1}\right] \text{ ou } x \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n}\right]}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ est

$$\boxed{\mathscr{S}_F = \left\{\frac{(4k+1)\pi}{2(n+1)} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\ell\pi}{n} \mid \ell \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

(b) Pour déterminer les solutions de (E) sur $]0, 2\pi[$, on résout les équations suivantes d'inconnues $k, \ell \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
0 < \frac{(4k+1)\pi}{2(n+1)} < 2\pi &\Leftrightarrow 0 < 4k+1 < 4(n+1) \\
&\Leftrightarrow \frac{-1}{4} < k < n + \frac{3}{4} \\
&\Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant n \\
0 < \frac{2\ell\pi}{n} < 2\pi &\Leftrightarrow 0 < \ell < n \\
&\Leftrightarrow 1 \leqslant \ell \leqslant n-1
\end{aligned}$$

On en déduit l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, 2\pi[$:

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{\frac{(4k+1)\pi}{2(n+1)} \mid k \in [\![0, n]\!]\right\} \cup \left\{\frac{2\ell\pi}{n} \mid \ell \in [\![1, n-1]\!]\right\}}$$

4. Supposons n non multiple de 4. Dans la réunion précédente, le premier ensemble contient exactement $n+1$ éléments et le second $n-1$. Si ces deux ensembles sont disjoints, alors la réunion $\mathscr{S}_E$ contiendra exactement $2n$ éléments. Raisonnons par l'absurde et supposons que ces deux ensembles ne soient pas disjoints. Il existe alors $k \in [\![0, n]\!]$ et $\ell \in [\![1, n-1]\!]$ tels que $\frac{(4k+1)\pi}{2(n+1)} = \frac{2\ell\pi}{n}$. On en déduit alors $(4k+1)n = 4(n+1)\ell$, d'où $n = 4\left((n+1)\ell - kn\right)$. Comme $(n+1)\ell - kn$ est entier, n est un multiple de 4, ce qui contredit notre hypothèse. D'où le résultat.