TD A4. Nombres complexes

1 Forme algébrique, conjugué, module

Exercice A4.1

Donner la forme algébrique de

1. $\dfrac{3+5i}{5-3i}$,
2. $(2-i)^3$.

Exercice A4.2 ✲

À quelle condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b le nombre

$$A = (2a - b - i(a+b))(-a - i(a+b))$$

est-il un nombre réel ?

Exercice A4.3 ✲

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ tels que $1 + z_1 z_2 \neq 0$. Montrer que $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

Exercice A4.4 ✲

Démontrer que si $1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} - nz^n = 0$, alors $|z| \leqslant 1$.

Exercice A4.5

Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

1. $|z-1| = 3$,
2. $|z+i| \leqslant 2$,
3. $|z| = |z-4|$

Exercice A4.6 ✲

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

1. Montrer que $\dfrac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$.
2. Quel est le lieu géométrique des points M dont l'affixe z vérifie $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = 0$.

Exercice A4.7 ✲

Trouver tous les complexes z tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ aient le même module.

Exercice A4.8

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on définit $z' = \dfrac{1+z}{1-z}$. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que

1. $|z'| = 1$,
2. $|z'| = 2$,
3. $z' \in \mathbb{R}$,
4. $z' \in i\mathbb{R}$.

Exercice A4.9 ✲✲

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $|z+1| = |z|+1$,
2. $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$

Exercice A4.10

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$.

1. $z^2 + (-2+i)z - 1 + 5i = 0$,
2. $z + \dfrac{1}{z} = 0$,
3. $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$,
4. $2z^2 - 2(1+\cos\theta)z + 1 + \cos\theta = 0$,

2 Forme trigonométrique

Exercice A4.11

Soit $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z = (1 + i\tan t)^2$.

Exercice A4.12

Déterminer les parties réelle, imaginaire, module et argument de

1. $2 + 2i$,
2. $\dfrac{e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/4}}$,
3. $\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$,
4. $-2(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6})$.

Exercice A4.13 ✲

Calculer

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-1)i}{2-i}\right)^{17}$$

Exercice A4.14 ✲

Soit t un réel non congru à π modulo 2π. Déterminer le module et un argument de

1. $1 + e^{it}$,
2. $i - e^{it}$,
3. $\dfrac{1-i}{1+e^{it}}$.

Exercice A4.15

Déterminer le module et un argument de

1. $(1+i)^n + (1-i)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$,
2. $\dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$.

Exercice A4.16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$.

1. $z^6 = -1$,
2. $z^4 + 4 = 0$,
3. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$,
4. $\overline{z}^7 = \dfrac{1}{z^2}$.

Exercice A4.17

Linéariser les fonctions suivantes.

1. $f : t \mapsto \cos^4 t$,
2. $g : t \mapsto \sin^5 t$,
3. $h : t \mapsto \sin^3 t \cos t$,
4. $k : t \mapsto \cos(3t)\sin^3(2t)$.

Exercice A4.18

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer en fonction de $\cos(x)$:
   (a) $\cos(5x)$,
   (b) $\sin(6x)\sin(x)$.
2. Exprimer en fonction de $\sin(x)$:
   (a) $\sin(7x)$,
   (b) $\sin(3x)\cos(2x)$.

Exercice A4.19 ✲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikt}$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kt)$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kt)\cos^k t$.

Exercice A4.20 ✲✲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. Simplifier $A = \displaystyle\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1|$.

Exercice A4.21 ✲✲

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer, à l'aide des formules d'Euler, qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\cos t + b\sin t = A\cos(t-\varphi).$$

Exercice A4.22 ✲✲

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ le nombre $z = \left(\dfrac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est-il un nombre réel positif ?

Exercice A4.23 ✲

Le but est de calculer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. On pose $\omega = e^{2i\pi/5}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \omega^k$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1 = 0$.
3. À l'aide de formules trigonométriques, exprimer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
4. En déduire une équation du second degré dont $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution.
5. Conclure

Exercice A4.24

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module 1. Déterminer une forme trigonométrique de $1 + z + z^2$.

Exercice A4.25

Résoudre dans $\mathbb{C}$.

1. $e^z = 1 + i$,
2. $e^z = -5 - 12i$,
3. $e^z + e^{-z} = 1$,
4. $e^z + 2e^{-z} = i$.

Exercice A4.26 ✲✲

Soit A, B et C trois points distincts dans le plan complexe d'affixes a, b et c. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-c} = j$ ou j^2.
2. Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.
3. Soit ABC un triangle quelconque. On construit trois triangles équilatéraux à l'extérieur de celui-ci, de bases $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. Montrer que les centres de gravité I, J et K de ces triangles forment à leur tout un triangle équilatéral. *Remarque : le centre de gravité de 3 points d'affixes z_1, z_2 et z_3 est défini comme le point d'affixe* $\dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$.