

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Rappels sur la fonction th et étude de sa réciproque

On notera respectivement ch, sh et th les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer que th est bien définie puis, en étudiant ses variations, que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser. On note argth (« argument tangente hyperbolique ») sa réciproque.
2. Exprimer la dérivée de th en fonction de th.
3. Démontrer que argth est impaire.
4. Démontrer que argth est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. Exprimer argth à l'aide de fonctions usuelles.

Étude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :

Déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}.$$

6. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.
7. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.
8. Montrer que, si f est solution, on a $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$.
(on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$.)
9. Montrer que si f est solution, $-f$ est aussi solution.
10. Montrer que th est solution du problème posé.
11. Dans les questions (11a) à (11e), on suppose que f est une solution du problème posé, que $f(0) = 1$ et que f n'est pas constante.
On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.
 - (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

- (b) Établir une relation entre u_n et u_{n+1} ; en déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0 .
 - (c) En utilisant les résultats des deux questions précédentes, aboutir à une contradiction.
 - (d) Que peut-on dire si l'hypothèse « $f(0) = 1$ » est remplacée par l'hypothèse « $f(0) = -1$ » ?
 - (e) Conclusion ?
12. Dans les questions (12a) à (12d), on suppose que f est une solution du problème posé et que $f(0) = 0$. En raisonnant comme pour les questions (11a) à (11e), on peut montrer (et on admettra donc ici) que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 1 \text{ et } f(x) \neq -1.$$

On définit alors la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \operatorname{argth}(f(x))$.

- (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x)$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} g(2^n x) = 2^n g(x)$.
- (b) Montrer que g est dérivable en zéro.

- (c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on définit la suite (v_n) par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$.

Montrer que (v_n) converge vers $g'(0)$.

- (d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}, xv_n = g(x)$. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que g soit la fonction $x \mapsto \lambda x$.

13. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.