Problème 1

Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'objet de ce problème est de majorer l'expression

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Premières sommes

1. D'après la formule du binôme de Newton : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = \boxed{1}$.

2. (a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k\binom{n}{k} = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \boxed{n\binom{n-1}{k-1}}$.

   (b)
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \text{ en enlevant un terme nul} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \text{ d'après la formule du Chef} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} n\binom{n-1}{i} x^{i+1} (1-x)^{n-(i+1)} \text{ par } i = k-1 \\
&= nx \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{i} (1-x)^{n-1-i} \text{ en factorisant par } nx \\
&= nx \times 1 \text{ par binôme de Newton.}
\end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx}$.

3.
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \text{ en enlevant deux termes nuls} \\
&= \sum_{k=2}^{n} (k-1)n\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \text{ d'après la formule du Chef} \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} \text{ d'après la formule du Chef derechef} \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} n(n-1)\binom{n-2}{i} x^{i+2} (1-x)^{n-(i+2)} \text{ par } i = k-2 \\
&= n(n-1)x^2 \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} x^{i} (1-x)^{n-2-i} \text{ en factorisant par } nx \\
&= n(n-1)x^2 \times 1 \text{ par binôme de Newton.}
\end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2}$.

4. On aura aussi besoin de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2+nx.$$

Ainsi,
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= x^2S_0-\frac{2x}{n}S_1+\frac{1}{n^2}S_2 \text{ (avec des notations transparentes)}\\ &= x^2-\frac{2x}{n}nx+\frac{1}{n^2}(n(n-1)x^2+nx)\\ &= \boxed{\frac{x(1-x)}{n}}.\end{aligned}$$

La somme qui nous intéresse

On note :

- A l'ensemble des entiers $k \in [\![0,n]\!]$ tels que $\left|x-\frac{k}{n}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$
- B l'ensemble des entiers $k \in [\![0,n]\!]$ tels que $\left|x-\frac{k}{n}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On appelle alors $f_A(x) = \displaystyle\sum_{k\in A}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ et $f_B(x) = \displaystyle\sum_{k\in B}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

5. Pour $k\in A$, on a $\left|x-\frac{k}{n}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $f_A(x) \leqslant \displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k\in A}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k\in[\![0,n]\!]}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ (en ajoutant des termes positifs).

   Finalement, $\boxed{f_A(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}}$.

6. $\forall k \in B$, $\left|x-\frac{k}{n}\right|\sqrt{n} \geqslant 1$, d'où $\left|x-\frac{k}{n}\right|\sqrt{n} \leqslant \left(\left|x-\frac{k}{n}\right|\sqrt{n}\right)^2 = n\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$.

   Donc $\sqrt{n}f_B(x) = \displaystyle\sum_{k\in B}\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \sum_{k\in B} n\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant x(1-x)$ d'après la partie précédente.

   Finalement, comme $\sqrt{n}>0$, $\boxed{f_B(x) \leqslant \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}}$.

7. On montre que $x \mapsto x(1-x)$ est une fonction polynomiale de degré 2, croissante sur $[0,1/2]$ et décroissante sur $[1/2,1]$.

8. En particulier, $\forall x\in[0,1], x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.

   D'où $f(x) = f_A(x)+f_B(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{4\sqrt{n}}$, donc $\boxed{f(x) \leqslant \frac{5}{4\sqrt{n}}}$.

Problème 2

A Un exemple

On souhaite déterminer toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 2y(x) = 2x + 4 \tag{E}$$

1. On cherche tout d'abord les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 2y(x) = 0 \tag{H}$$

   (a) Soit $K \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto Ke^{-2x}$.
   Alors y est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = -2Ke^{-2x} = -2y(x)$.
   Ainsi on a bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + 2y(x) = 0}$.

   (b) Réciproquement, soit y solution de (H). On pose $f : x \mapsto y(x)e^{2x}$.
   Alors f est dérivable par produit de fonctions qui le sont.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (y'(x) + 2y(x))e^{2x} = 0$ car y est solution de (H).
   Donc $\boxed{f \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$.

2. On s'intéresse maintenant à (E)

   (a) Soit $y_0 : x \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
   y_0 est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x) + 2y_0(x) = 2x + 4$, *i.e.* $a + 2b + 2ax = 2x + 4$.
   Par identification (ou en posant deux valeurs de x quelconques pour avoir deux équations), on obtient : $a = 1$ et $b = \dfrac{3}{2}$.
   Ainsi, $\boxed{x \mapsto x + \dfrac{3}{2}}$ est solution de (E).

   (b) Soit y solution de (E) et $z = y - y_0$.
   Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) + 2y(x) = 2x + 4$ et $y_0'(x) + 2y_0(x) = 2x + 4$.
   Par différence, $y'(x) - y_0'(x) + 2y(x) - 2y_0(x) = 0$, soit $(y - y_0)'(x) + 2(y - y_0)(x) = 0$.
   Ainsi, $\boxed{y - y_0 \text{ est solution de (H)}}$.

   (c) Soit $z : x \mapsto Ke^{-2x}$. On a vu en 1 que z est solution de (H).
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) + 2y(x) = y_0'(x) + 2y_0(x) + z'(x) + 2z(x) = 2x + 4$.
   Donc $\boxed{y : x \mapsto y_0(x) + Ke^{-2x} \text{ est solution de (E)}}$.

B Généralisation

Soit a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On cherche à trouver les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \tag{E1}$$

On définit l'équation (appelée **équation homogène** associée) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0 \tag{H1}$$

3. $\boxed{\Leftarrow}$ Soit $y : x \mapsto Ke^{-A(x)}$. Alors y est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = -Ka(x)e^{-A(x)} = -a(x)y(x)$. Donc $\boxed{y \text{ est solution de (H1)}}$.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Soit y une solution de (H1). On pose $f : x \mapsto y(x)e^{A(x)}$. Alors f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = (y'(x) + a(x)y(x))e^{A(x)} = 0$ donc f est constante (égale à K pour un certain $K \in \mathbb{R}$) et donc $\boxed{\exists K \in \mathbb{R},\ y : x \mapsto Ke^{-A(x)}}$.

4. Soit $y_0 : x \mapsto u(x)e^{-A(x)}$.
Alors y_0 est solution de (E1) si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x) + a(x)y_0(x) = b(x)$,
i.e. $(u'(x) - a(x)u(x) + a(x)u(x))e^{-A(x)} = b(x)$, soit encore $u'(x) = b(x)e^{A(x)}$, si et seulement si $\boxed{u \text{ est une primitive de } x \mapsto b(x)e^{A(x)}}$.

5.
$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de (E1)} &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + a(x)y(x) = y_0'(x) + a(x)y_0(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (y - y_0)'(x) + a(x)(y - y_0)(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \boxed{y - y_0 \text{ est solution de (H1)}}.
\end{aligned}$$

6. Les solutions de (E1) sont donc $\boxed{\{x \mapsto Ke^{-A(x)} + u(x)e^{-A(x)},\ K \in \mathbb{R}\}}$.

7. **Application :** Ici $a : x \mapsto -2x$, prenons $A : x \mapsto -x^2$.
Une primitive de $x \mapsto -(2x-1)e^x e^{-x^2} = -(2x-1)e^{-x^2+x}$ sera $u : x \mapsto e^{-x^2+x}$.
Ainsi $Ke^{-A(x)} + u(x)e^{-A(x)} = Ke^{x^2} + e^{-x^2+x}e^{x^2}$.
L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\{x \mapsto Ke^{x^2} + e^x,\ K \in \mathbb{R}\}}$.

C Second ordre

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On cherche les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = 0. \tag{E2}$$

8. Soit $r \in \mathbb{R}$ et $q : x \mapsto e^{rx}$. Alors q est deux fois dérivable et on a $q' : x \mapsto re^{rx}$ et $q'' : x \mapsto r^2e^{rx}$.
q vérifie (E2) si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, (\alpha r^2 + \beta r + \gamma)e^{rx} = 0$.
Or e^{rx} ne s'annule pas pour $x \in \mathbb{R}$, donc ceci équivaut à

$$\boxed{\alpha r^2 + \beta r + \gamma = 0} \tag{EC}$$

9. Soit Δ le discriminant de (EC).
   (a) Supposons $\Delta > 0$ et soit r_1, r_2 les deux solutions de (EC). Alors $y_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $y_2 : x \mapsto e^{r_2 x}$ sont solutions de (E2). Pour toutes constantes $K, L \in \mathbb{R}$, $\boxed{y = Ky_1 + Ly_2 \text{ est aussi solution de (E2)}}$.
   En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha y_1''(x) + \beta y_1'(x) + \gamma y_1(x) = 0$ et $\alpha y_2''(x) + \beta y_2'(x) + \gamma y_2(x) = 0$. Donc $\boxed{\alpha(Ky_1 + Ly_2)''(x) + \beta(Ky_1 + Ly_2)'(x) + \gamma(Ky_1 + Ly_2)(x) = 0}$.
   (b) Supposons $\Delta = 0$ et soit r l'unique solution de (EC). D'une part, r est solution de (EC) donc $\boxed{x \mapsto e^{rx} \text{ est solution de (E2)}}$.
   D'autre part, soit $p : x \mapsto xe^{rx}$. Alors $p' : x \mapsto (rx+1)e^{rx}$ et $p'' : (r^2x + 2r)e^{rx}$.
   Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha p''(x) + \beta p'(x) + \gamma p(x) = \left((\alpha r^2 + \beta r + \gamma)x + (2\alpha r + \beta)\right)e^{rx}$. Or r est solution de (EC) et $r = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$. Donc $\boxed{\alpha p''(x) + \beta p'(x) + \gamma p(x) = 0}$.

10. **Application :**
   (a) On cherche les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0.$$
   Équation caractéristique : $r^2 - 5r + 6 = 0 \Leftrightarrow r = 2$ ou 3.
   Donc les solutions sont $\boxed{\{x \mapsto Ke^{2x} + Le^{3x},\ K, L \in \mathbb{R}\}}$.

(b) On constate que $y_0 : x \mapsto x$ est solution de l'équation.
Or y vérifie $y'' - 5y' + 6y = 6x - 5$ si et seulement si $z = y - y_0$ vérifie $z'' - 5z' + 6z = 0$ (adapter la démarche de la question 5).
Finalement on a les solutions : $\boxed{\{x \mapsto Ke^{2x} + Le^{3x} + x,\ K, L \in \mathbb{R}\}}$.