Sol A4. Nombres complexes

Solution A4.15

1. $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $(1+i)^n = \sqrt{2}^n e^{in\frac{\pi}{4}}$.
   On remarque que $(1+i)^n = \overline{(1-i)^n}$, donc $(1+i)^n + (1-i)^n = 2\,\mathrm{Re}\left(\sqrt{2}^n e^{in\frac{\pi}{4}}\right)$.
   Donc $(1+i)^n + (1-i)^n = \sqrt{2}^n \times 2\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$.
   À distinguer suivant les valeurs de n (le reste de sa division par 8) :
   - Si $\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right) > 0$, alors c'est le module et l'argument est nul,
   - Si $\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right) < 0$, alors le module est son opposé et l'argument vaut π,
   - Si $\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, le module est nul et il n'y a pas d'argument.
2. Avec $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, le nombre à calculer B vaut :
   $B = \dfrac{4e^{i\pi}}{2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}} + \dfrac{4e^{-i\pi}}{2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i\pi/4} + \sqrt{2}e^{-i\pi/4} = 2\sqrt{2}\cos(\pi/4) = 2.$

Exercice A4.17

1. On utilise Euler puis la formule du binôme (puissance 4), enfin à nouveau Euler (avec $\cos(4t)$ et $\cos(2t)$).
   $f(t) = \dfrac{1}{8}\cos(4t) + \dfrac{1}{2}\cos(2t) + \dfrac{3}{8}$.
2. Même démarche : $g(t) = \dfrac{1}{16}\sin(5t) - \dfrac{5}{16}\sin(3t) + \dfrac{5}{8}\sin(t)$.
3. Tout d'abord $\sin^3(t) = -\dfrac{1}{4}\sin(3t) + \dfrac{3}{4}\sin(t)$. Puis on multiplie par $\cos(t)$ et on utilise les formules de linéarisation.
   Ou bien on s'arrête aux exponentielles : $\sin^3(t)\cos(t) = -\dfrac{1}{16i}(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it})(e^{it} + e^{-it})$ et on développe puis on utilise Euler (avec $\sin(4t)$ et $\sin(2t)$).
   Les deux voies mènent à $h(t) = -\dfrac{1}{8}\sin(4t) + \dfrac{1}{4}\sin(2t)$.
4. $k(t) = -\dfrac{1}{8}\sin(9t) + \dfrac{3}{8}\sin(5t) + \dfrac{1}{8}\sin(3t) - \dfrac{3}{8}\sin(t)$.

Exercice A4.18

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer en fonction de $\cos(x)$:
   (a) $\cos(5x) + i\sin(5x) = (\cos(x) + i\sin(x))^5$ et on développe avec la formule du binôme.
   La partie réelle donne $\cos(5x) = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$. Puis on remplace $\sin^2$ par $1-\cos^2$ (et donc bien sûr $\sin^4$ par $(1-\cos^2)^2$).
   Après regroupements : $\cos(5x) = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$.
   (b) $\sin(6x)\sin(x) = -32\cos^7 x + 64\cos^5 x - 38\cos^3 x + 12\cos x$.
2. Exprimer en fonction de $\sin(x)$:
   (a) Même chose en remplaçant cette fois $\cos^2$ par $1-\sin^2$.
   $\sin(7x) = -64\sin^7 x + 12\sin^5 x - 56\sin^3 x + 7\sin x$.
   (b) $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$ et $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$.
   D'où $\sin(3x)\cos(2x) = 8\sin^5 x - 10\sin^3 x + 3\sin x$.