Devoir maison n° 6

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on note

- $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1,
- P le demi-plan des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive,
- D le disque des nombres complexes de module strictement inférieur à 1.

Étant donnés $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$, on appelle **homographie** une application h qui, à tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $cz + d \neq 0$, associe

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

A Premier exemple : une similitude

On définit la fonction

$$h_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 3z - i \end{array}$$

1. Donner les caractéristiques géométriques de cette similitude.
2. h_0 est-elle bijective ? Justifier.

B Deuxième exemple

Soit h l'homographie définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $h(z) = i\dfrac{1+z}{1-z}$.

3. Montrer que $\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, $h(z) \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que $\forall z \in D$, $h(z) \in P$.
5. Déterminer les nombres complexes z tels que $h(z) = z$.
6. Pour quelles valeurs de $w \in \mathbb{C}$ l'équation $h(z) = w$ a-t-elle une solution dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$?

C Conservation du cercle unité

7. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie sur $\mathbb{C}^*$ par

$$h(z) = \frac{e^{i\theta}}{z}.$$

Montrer que $\forall z \in \mathbb{U}$, $h(z) \in \mathbb{U}$.

8. Soient $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie par
$$h(z) = e^{i\theta} \frac{z+\alpha}{\overline{\alpha} z + 1}.$$
Vérifier que h est bien définie sur $\mathbb{U}$ et montrer que
$$\forall z \in \mathbb{U},\ h(z) \in \mathbb{U}.$$
On dit que h **conserve** $\mathbb{U}$. On va maintenant montrer que seules les homographies des types ci-dessus conservent $\mathbb{U}$.

9. Deux petits résultats techniques utiles pour la suite.
   9.a Montrer que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{\alpha}\beta)$. À la démonstration de quel théorème bien connu ce résultat est-il également utile ?
   9.b Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que
$$\Big(\forall \theta \in \mathbb{R},\ a + 2\operatorname{Re}(be^{-i\theta}) = 0\Big) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

10. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On pose h l'homographie définie sur $\mathbb{U}$ par
$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$
et on suppose que $\forall z \in \mathbb{U},\ h(z) \in \mathbb{U}$.
   10.a Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{a}be^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{c}de^{-i\theta})$.
   10.b En déduire que $\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 \\ \overline{a}b = \overline{c}d \end{cases}$.
   10.c Si $a = 0$, montrer que h est du type étudié à la question 7.
   10.d Si $a \neq 0$, montrer que $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$.
   10.e En distinguant les deux cas possibles, montrer que h est alors du type étudié à la question 8.

11. Vous avez compris ce qu'on a fait ? Prouvez-le en énonçant le mieux possible le théorème que nous avons démontré dans cette partie C.

Problème 2 *(facultatif mais intéressant)*

Dans ce problème, on étudie une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polygone soit régulier. Après quelques classiques (partie A) et quelques variations autour de l'inégalité triangulaire (partie B), on en viendra à la condition proprement dite (partie C). On reviendra dans la partie D à l'étude du cas où le polygone en question est un triangle.

A Deux exemples, études classiques

1. Soit A, B deux points du plan complexe d'affixes respectives a et b.
   (a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$.
   (b) Soit D d'affixe d tel que $\dfrac{d-a}{d-b} = i$ et F d'affixe f tel que $\dfrac{f-a}{f-b} = -i$. Montrer que $ADBF$ est un carré.
2. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} \in \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\}$.

B Autour de l'inégalité triangulaire

On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité triangulaire :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z+z'| \leqslant |z| + |z'|. \tag{1}$$

Le but de cette partie est d'étudier le cas de plus de deux nombres et les cas d'égalité. En particulier, on va montrer qu'il y a égalité si et seulement si les nombres considérés ont même argument.

3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$ et tous nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$,

$$|z_1 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + \ldots + |z_n| \tag{2}$$

4. Cas d'égalité pour $n = 2$.
   (a) Montrer que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\mathrm{Re}(\overline{z_1} z_2) = |z_1||z_2|$.
   (b) En déduire que l'on a l'égalité $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\arg(z_1) = \arg(z_2)[2\pi]$.
5. On suppose que l'on a la propriété au rang n, c'est-à-dire :

$$|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n| \text{ si et seulement si } \arg(z_1) = \ldots = \arg(z_n)[2\pi].$$

   Soit $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes tels que

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| = |z_1| + \ldots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

   (a) Montrer que

$$|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n| \quad \text{et} \quad |z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| = |z_1 + \ldots + z_n| + |z_{n+1}|.$$

   Indication : on pourra poser $z = z_1 + \ldots + z_n$, $z' = z_{n+1}$ et utiliser judicieusement (1) *et* (2).
   (b) En déduire que $\arg(z_1) = \ldots = \arg(z_{n+1})[2\pi]$. Conclure.

C Caractérisation d'un polygone régulier

Soit $n \geqslant 2$. On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soient $M_1, \ldots, M_n$ des points du plan d'affixes respectives $z_1, \ldots, z_n$ vérifiant $|z_1| = \ldots = |z_n| = \rho > 0$.

On dit que le polygone (parcouru dans le sens direct) $M_1 \ldots M_n$ est **régulier** si

$$(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \ldots = (\overrightarrow{OM_{n-1}}, \overrightarrow{OM_n}) = (\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{2\pi}{n}.$$

On va montrer que le polygone $M_1 \ldots M_n$ est régulier si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k = n z_1.$$

6. Supposons tout d'abord que le polygone $M_1 \ldots M_n$ est régulier et posons $z_1 = \rho e^{i\theta}$.
   (a) Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, déterminer le module et un argument de z_k.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k = n z_1$.

7. On suppose maintenant réciproquement que $\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k = n z_1$.

   (a) Calculer $\left| \sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k \right|$. En déduire que

$$\forall k \in \{1 \dots n\},\ \arg(\omega^{n+1-k} z_k) = \arg(z_1)[2\pi].$$

   (b) En déduire que le polygone est régulier.

D Le cas d'un triangle équilatéral

Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c. On rappelle la notation $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Le but de cette partie est de montrer que ABC est un polygone régulier (un triangle équilatéral dans le cas de trois points) si et seulement si $a + jb + j^2 c = 0$.

8. Justifier que $1 + j + j^2 = 0$.
9. On suppose tout d'abord que $a + jb + j^2 c = 0$. En déduire que le triangle ABC a deux côtés égaux et un angle de mesure $\pm\frac{\pi}{3}$. Conclure.
10. Réciproquement, on suppose maintenant que le triangle ABC est équilatéral.

    (a) Dans le cas où $|a| = |b| = |c|$, montrer comment la condition de la partie C implique que $a + jb + j^2 c = 0$. *(indication : on pourra appliquer cette condition à a, b et c, puis à b, c et a, et encore à c, a et b)*

    (b) Dans le cas où a, b et c ne sont pas de même module, on pose

$$a' = a - \frac{a+b+c}{3}\ ;\ b' = b - \frac{a+b+c}{3} \ \text{ et } \ c' = c - \frac{a+b+c}{3}.$$

    Montrer que $a' + jb' + j^2 c' = 0$ si et seulement si $a + jb + j^2 c = 0$. Montrer que $|a'| = |b'| = |c'|$ et conclure.