

Problème 1**Étude de la fonction réciproque de la fonction th.**

1. La fonction th est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall x \in \mathbb{R}, e^x + e^{-x} > 0$).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$ qui est strictement positive pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction th est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = -1$ donc th réalise une bijection à valeurs dans $I =]-1, 1[$.

2. Sur $\mathbb{R}$, $\text{th}' = \frac{\text{ch}^2 - \text{sh}^2}{\text{ch}^2} = \boxed{1 - \text{th}^2}$.

3. argh est définie sur $\mathbb{R}$ et th est impaire donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{argth}(-x) = \text{argth}(-\text{th}(\text{argth}(x))) = \text{argth}(\text{th}(-\text{argth}(x))) = -\text{argth}(x).$$

Donc argth est impaire.

4. argth est dérivable sur $] -1, 1[$ comme bijection réciproque de th, dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée

$$\text{ne s'annule pas, et } \forall x \in] -1, 1[, \text{argth}'(x) = \frac{1}{\text{th}'(\text{argth}(x))} = \frac{1}{1 - \text{th}^2(\text{argth}(x))} = \boxed{\frac{1}{1 - x^2}}.$$

5. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\text{th}(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$.

$$\text{Pour tout } x \in] -1, 1[, y = \text{argth}(x) \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}.$$

$$\text{D'où } y = \boxed{\text{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right)}.$$

Étude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :

Déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}.$$

6. Soit $K \in \mathbb{R}$. Soit $f : x \mapsto K$ une fonction constante. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable en 0. Alors

$$f \text{ est solution du problème} \Leftrightarrow \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{2K}{1 + K^2}$$

$$\Leftrightarrow K(K^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow K(K - 1)(K + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K \in \{0, 1, -1\}}$$

7. Si f est solution, alors pour $x = 0$, on a : $f(2 \times 0) = \frac{2f(0)}{1 + (f(0))^2}$. Alors (on a déjà résolu cette équation avec K dans la question précédente) $f(0) \in \{0, 1, -1\}$

8. Si f est solution, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(2\frac{x}{2}\right) = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + f\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Or on montre par l'étude de la fonction $t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$ que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{2t}{1+t^2} \in [-1, 1]$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$

9. Si f est solution, alors $-f$ est également définie sur $\mathbb{R}$, dérivable en 0 et elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-f)(2x) = -\frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2} = \frac{2(-f)(x)}{1 + (-f(x))^2}.$$

Donc $-f$ est solution du problème.

10. th est une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}(2x) = \frac{\text{sh}(2x)}{\text{ch}(2x)} = \frac{2\text{sh}(x)\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x)} = \frac{2\text{th}(x)}{1 + (\text{th}(x))^2}.$$

Donc th est solution du problème.

11. Dans les questions (11a) à (11e), on suppose que f est une solution du problème posé, que $f(0) = 1$ et que f n'est pas constante.

On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.

(a) $\frac{x_0}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et f est dérivable donc continue en 0. Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0) = 1$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f\left(2\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = \frac{2f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)}{1 + \left(f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)\right)^2}$.

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2u_{n+1}}{1 + u_{n+1}^2}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}, 1 + u_n^2$ est positif. Donc u_n est du signe de u_{n+1} .

Donc (u_n) est de signe constant (on peut s'entraîner à rédiger la récurrence simple qui le montre).

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2}{1 + u_{n+1}^2}$. Or $u_{n+1} \in [-1, 1]$ donc $u_n^2 \leq 1$ et donc $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 1$.

Donc

— si $u_0 > 0$, alors $u_n > 0$ pour tout n et (u_n) est décroissante,

— si $u_0 < 0$, alors $u_n < 0$ pour tout n et (u_n) est croissante.

(c) On a $f(x_0) \neq 1$ donc $f(x_0) < 1$ et donc $u_0 < 1$.

— si $u_0 > 0$, alors (u_n) est décroissante donc sa limite est $\ell \leq u_0 < 1$, ce qui contredit la question (11a),

— si $u_0 < 0$, alors $u_n < 0$ pour tout n et la limite de (u_n) est négative, ce qui contredit la question (11a).

— le cas $u_0 = 0$ est exclu car alors on aurait (u_n) constante égale à 0.

Dans tous les cas, on aboutit à une contradiction.

(d) Si l'hypothèse « $f(0) = 1$ » est remplacée par l'hypothèse « $f(0) = -1$ » alors on a la fonction $(-f)$ qui est solution avec $(-f)(0) = 1$. Les questions précédentes montrent donc également que ce n'est pas possible.

- (e) Si $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$, seule une fonction constante est solution. (Et réciproquement les fonctions constantes égales à 1 et -1 sont bien solutions)
12. Dans les questions (12a) à (12d), on suppose que f est une solution du problème posé et que $f(0) = 0$. En raisonnant comme pour les questions (11a) à (11e), on peut montrer (et on admettra donc ici) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 1 \text{ et } f(x) \neq -1.$$

On définit alors la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \operatorname{argth}(f(x))$.

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(2g(x)) = \operatorname{th}(2 \operatorname{argth}(f(x))) = \frac{2 \operatorname{th}(\operatorname{argth}(f(x)))}{1 + (\operatorname{th}(\operatorname{argth}(f(x))))^2} = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2} \text{ car } f(x) \in]-1, 1[.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(2g(x)) = f(2x). \text{ Donc } 2g(x) = \operatorname{argth}(f(2x)), \text{ soit } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, 2g(x) = g(2x)}.$$

On en déduit par récurrence (la rédiger !) que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, g(2^n x) = 2^n g(x)$.

(b) f est dérivable en 0 et argth est dérivable en $f(0) = 0$ donc par composition, g est dérivable en zéro.

$$(c) \quad v_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right) - g(0)}{\frac{x}{2^n} - 0} \text{ et } \boxed{\text{converge donc vers } g'(0)} \text{ car } g \text{ est dérivable en } 0.$$

$$(d) \quad \text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } n \in \mathbb{N}, xv_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = g(x) \text{ car } g\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}g(x).$$

Donc par passage à la limite, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g'(0)x$.

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \lambda x$.

13. Synthèse : on vérifie que les fonctions de la forme $f : x \mapsto \operatorname{th}(\lambda x)$ sont solutions du problème. En effet, elles sont bien définies sur $\mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \operatorname{th}(2\lambda x) = \frac{2 \operatorname{th}(\lambda x)}{1 + (\operatorname{th}(\lambda x))^2} = \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2}.$$

Finalement les fonctions solutions sont $\{x \mapsto \operatorname{th}(\lambda x), \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $\{x \mapsto -1, x \mapsto 0, x \mapsto 1\}$.