Devoir surveillé n° 2

Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vrai ou faux ? (Justifier)
   (a) Si f est paire, alors $g \circ f$ est paire.
   (b) Si f est impaire et g est impaire, alors $g \circ f$ est paire.
   (c) Si $g \circ f$ est impaire, alors f ou g est impaire.
2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{3x^2 - 11x - 5}{x - 4}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.
   (b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (c) Préciser les asymptotes à $\mathcal{C}_f$.
   (d) Donner une allure de la courbe représentative de f.
3. Soit $g : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$.
   (a) Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité de g.
   (b) Déterminer les variations de g. En déduire un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que la restriction de g à cet intervalle soit bijective.
   (c) Déterminer alors une expression de sa bijection réciproque (en précisant son ensemble de définition).

Problème 1

On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & xe^x \end{array}$$

et on admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$. On admet que $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$.
2. Exprimer la dérivée de f puis dresser le tableau de variations de f où l'on fera apparaître notamment $f(-1)$.
3. Tracer une allure du graphe de f.
4. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ dans $\left[-\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$.

Dans toute la suite, on note W la bijection réciproque de $f|_{[-1,+\infty[}$.

Étude plus complète de la fonction W

5. Montrer que $W(e) = 1$. Déterminer également $W(0)$ et $W(-1/e)$.
6. À partir des variations de f, dresser le tableau de variations de W sur son domaine de définition et préciser sa limite en $+\infty$.
7. En déduire le signe de $W(x)$ en fonction de x.
8. (a) Montrer que W est dérivable sur $\left]-\frac{1}{e}, +\infty\right[$ et exprimer W'.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{1}{e}, +\infty\right[\setminus \{0\}$, on a $W'(x) = \dfrac{W(x)}{x(1 + W(x))}$.
9. Déduire de ce qui précède que $\forall x \in [e, +\infty[$, $W(x) \leqslant \ln(x)$.

Problème 2

Prérequis

1. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z| - |z'| \leqslant |z + z'|$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. Montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, si $p < q$, alors $|z^p| < |z^q|$.

Le problème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs tels que $0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $a_n \neq 0$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

Le but du problème est de montrer que les solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$ sont toutes de module inférieur ou égal à 1.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose aussi $A(z) = -a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_k) z^k$.

4. Montrer que
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |A(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) |z|^k + a_0.$$
5. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| > 1$, alors $|A(z)| \leqslant a_n |z|^n$.
6. Montrer que
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |(z-1)P(z)| \geqslant a_n |z^{n+1}| - |A(z)|.$$
7. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| > 1$, alors $|(z-1)P(z)| \geqslant a_n |z|^n (|z| - 1)$.
8. Conclure.

Problème 3

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le cosinus de z par
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
et on appelle $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction cosinus complexe définie par $\Phi(z) = \cos z$.

Le but de ce problème est de définir une fonction arccosinus complexe qui serait au cosinus complexe ce que la fonction arccosinus usuelle est au cosinus réel.

A Préliminaire

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

B Parties adaptées, exemples

Étant donnés deux ensembles non vides E et F, une fonction $f : E \to F$ et A une partie non vide de E, on appelle f_A la fonction $\begin{array}{rccc} f_A & : & A & \to & f(A) \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

On dit que A est une **partie adaptée** à f lorsque f_A est bijective.

On va maintenant étudier Φ sur différents sous-ensembles de $\mathbb{C}$ afin de déterminer un ensemble optimal où définir une réciproque.

2. Soit $A_1 = [0, \pi]$.
   Déterminer $\Phi(A_1)$, montrer que A_1 est adaptée à Φ et déterminer $\Phi_{A_1}^{-1}$.
3. Soit $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } \operatorname{Im} z > 0\}$.
   Déterminer $\Phi(A_2)$, montrer que A_2 est adaptée à Φ et déterminer $\Phi_{A_2}^{-1}$.
4. Soit $A_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \pi \text{ et } \operatorname{Im} z < 0\}$.
   Déterminer $\Phi(A_3)$, montrer que A_3 est adaptée à Φ et déterminer $\Phi_{A_3}^{-1}$.
5. Soit $A_4 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.
   On admet que A_4 est adaptée à Φ *(les courageux pourront se demander comment démontrer que l'union de parties adaptées dont les images sont deux à deux disjointes est encore une partie adaptée...ce n'est pas demandé ici car un peu technique et pas fondamental, cependant il est important pour la suite du problème de bien comprendre ce résultat admis)*
   Déterminer $\Phi(A_4)$ et déterminer $\Phi_{A_4}^{-1}$.

C Résolution de l'équation $\cos z = a$

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\cos z = a$ si et seulement si e^{iz} est solution d'une équation du second degré que l'on notera (E).
7. Montrer que (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes u_1 et u_2. Déterminer $u_1 u_2$ et $u_1 + u_2$ et montrer que ces solutions ne sont pas réelles.
8. En déduire qu'il existe un unique couple $(\rho_a, \theta_a) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[$ tel que $\rho_a e^{i\theta_a}$ soit solution de (E).
9. Montrer que $\rho_a \neq 1$.
10. Soit $A_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in]0, \pi[\text{ et } \operatorname{Im} z \neq 0\}$.
    Montrer qu'il existe un unique $z \in A_5$ tel que $\cos z = a$ et l'exprimer en fonction de ρ_a et θ_a.
    Cet élément de A_5 sera désormais noté $\zeta(a)$.
11. Calculer $\zeta(i)$.
12. Exprimer $\zeta(-a)$ en fonction de $\zeta(a)$.

D Il est temps de conclure

13. Représenter sur un même dessin les ensembles E_1, E_2, E_3 et E_5 de points du plan dont les affixes sont dans A_1, A_2, A_3 et A_5 respectivement.
14. Déterminer $\Phi(A_5)$.
15. Soit $A_6 = A_4 \cup A_5$. Comme pour A_4, on admet que A_6 est une partie adaptée à Φ.
    Déterminer $\Phi(A_6)$.
16. On définit la fonction arccosinus complexe par

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : \mathbb{C} & \to & A_6 \\ a & \mapsto & \Phi_{A_6}^{-1}(a) \end{array}.$$

    Déterminer $\Gamma(a)$ en fonction de a (en discutant selon les valeurs de a).
17. Montrer que $\Gamma(a) + \Gamma(-a) = \pi$.