

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Dans tout le problème, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite réelle bornée.

1. Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$.

A Définition

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle $E_n = \{u_k, k \geq n\}$.

(a) Montrer que E_n admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $s_n = \sup E_n$ et $i_n = \inf E_n$.

(b) Montrer que (s_n) est décroissante et que (i_n) est croissante.

(c) Montrer que les suites (s_n) et (i_n) sont convergentes. On notera dans la suite

$$L_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \quad \text{et} \quad L_i = \liminf(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} i_n.$$

Le nombre L_s est appelé limite supérieure de (u_n) et aussi noté $\limsup u_n$. De manière analogue,

L_i est appelé limite inférieure de (u_n) et noté $\liminf u_n$.

3. Déterminer les suites (s_n) , (i_n) ainsi que leurs limites L_s et L_i dans chacun des cas suivants :
 - (a) la suite (u_n) est constante égale à 0 ;
 - (b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$;
 - (c) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1}$.

B Lien avec la convergence

4. On suppose (seulement pour cette question) que $L_s = L_i$. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de (u_n) . On suppose que (v_n) est convergente. Montrer alors que

$$L_i \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq L_s.$$

6. Montrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $L_s = L_i = \ell$.
7. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) qui soit convergente et de limite L_s . (*on pourra procéder par récurrence forte*)
8. On note $(v_n) = (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n) = (u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \max\{\limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n, \limsup_{n \rightarrow +\infty} w_n\} \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \min\{\liminf_{n \rightarrow +\infty} v_n, \liminf_{n \rightarrow +\infty} w_n\}.$$