

A Premier exemple : une similitude

1. On écrit $h_0(z) = 3z - i = 3\left(z - \frac{i}{3}\right)$. C'est donc une similitude directe de rapport 3, d'angle 0, et de centre le point d'affixe $\frac{i}{3}$.

h_0 est la similitude directe de rapport 3, d'angle 0, de centre $\frac{i}{3}$.

2. Une application affine $z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$ est bijective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, d'inverse $z \mapsto \frac{z-b}{a}$. Ici $a = 3$, $b = -i$.

h_0 est bijective, d'inverse $z \mapsto \frac{z+i}{3}$.

B Deuxième exemple

Soit h l'homographie définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $h(z) = i \frac{1+z}{1-z}$.

3. Pour $z \in \mathbb{U}$, on a $\bar{z} = 1/z$. Alors

$$\overline{h(z)} = -i \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} = -i \frac{1+1/z}{1-1/z} = i \frac{1+z}{1-z} = h(z),$$

donc $h(z) \in \mathbb{R}$.

$\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}, h(z) \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que $\forall z \in D, h(z) \in P$.

Pour $z \in D$, on a $|z| < 1$ et

$$h(z) = i \frac{1+z}{1-z}.$$

On calcule

$$\Im(h(z)) = \frac{2(1-|z|^2)}{|1-z|^2} > 0,$$

d'où $h(z) \in P$.

$\forall z \in D, h(z) \in P$.

5. Déterminer les nombres complexes z tels que $h(z) = z$.

Équation : $i \frac{1+z}{1-z} = z \Leftrightarrow i(1+z) = z(1-z)$, soit $z^2 + (i-1)z + i = 0$. On trouve $\Delta = (i-1)^2 - 4i = -6i$, donc $\sqrt{\Delta} = \sqrt{6}e^{-i\pi/4}$. Ainsi :

$$z_{1,2} = \frac{1-i \pm \sqrt{6}e^{-i\pi/4}}{2}.$$

$$z_1 = \frac{1-i + \sqrt{6}e^{-i\pi/4}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{1-i - \sqrt{6}e^{-i\pi/4}}{2}.$$

6. Pour quelles valeurs de $w \in \mathbb{C}$ l'équation $h(z) = w$ a-t-elle une solution dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$?

On a $i(1+z) = w(1-z)$, soit $(i+w)z = w-i$. Si $i+w \neq 0$, une unique solution $z = \frac{w-i}{w+i}$; si $w = -i$, aucune.

$$\boxed{\forall w \neq -i, \text{ une unique solution } z = \frac{w-i}{w+i}; \text{ aucune si } w = -i.}$$

C Conservation du cercle unité

7. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $h(z) = \frac{e^{i\theta}}{z}$. Montrer que $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$.

Pour $z \in \mathbb{U}$, $|z| = 1$ donc $|h(z)| = \frac{|e^{i\theta}|}{|z|} = 1$.

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}.}$$

8. Soient $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $h(z) = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}$. Vérifier que h est bien définie sur $\mathbb{U}$ et que $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$.

Si $\bar{\alpha}z + 1 = 0$, alors $z = -1/\bar{\alpha}$ et $|z| = 1/|\alpha| \neq 1$, donc h est bien définie sur $\mathbb{U}$. Ensuite :

$$|h(z)| = \frac{|z + \alpha|}{|\bar{\alpha}z + 1|}.$$

Or

$$|z + \alpha|^2 = 1 + |\alpha|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{\alpha}), \quad |\bar{\alpha}z + 1|^2 = |\alpha|^2 + 1 + 2\operatorname{Re}(z\bar{\alpha}),$$

donc $|h(z)| = 1$.

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}.}$$

9. Deux petits résultats techniques utiles pour la suite.

9.a Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}\beta).$$

Ce résultat intervient aussi dans la démonstration du théorème de Pythagore.

$\boxed{\text{Identité vraie ; utilisée notamment dans le théorème de Pythagore.}}$

- 9.b Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, a + 2\operatorname{Re}(be^{-i\theta}) = 0$, la fonction $\theta \mapsto \operatorname{Re}(be^{-i\theta})$ n'est constante que si $b = 0$, et alors $a = 0$. La réciproque est évidente.

$$\boxed{(\forall \theta \in \mathbb{R}, a + 2\operatorname{Re}(be^{-i\theta}) = 0) \Rightarrow a = b = 0.}$$

10. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$, et $h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ vérifiant $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$.

10.a Pour $z = e^{i\theta}$, on a $|az + b| = |cz + d|$, soit

$$|a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{a}be^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{c}de^{-i\theta}).$$

$$\boxed{\text{Égalité vérifiée pour tout } \theta \in \mathbb{R}.}$$

10.b En utilisant le résultat précédent :

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2, \\ \bar{a}b = \bar{c}d. \end{cases}$$

Système obtenu : $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $\bar{a}b = \bar{c}d$.

10.c Si $a = 0$, alors $b \neq 0$ et $h(z) = \frac{b}{cz + d}$. Des conditions précédentes on tire $|b| = |d|$ et $c = 0$, donc

$$h(z) = \frac{b}{d} \frac{1}{z}, \quad |b/d| = 1.$$

$h(z) = e^{i\theta}/z$, type de la question 7.

10.d Si $a \neq 0$, on montre que $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$.

Produit nul : $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$.

10.e En distinguant les cas $|a| = |c|$ ou $|a| = |d|$, on obtient

$$h(z) = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}, \quad |\alpha| \neq 1.$$

h est du type de la question 8.

11. Théorème final : les homographies qui conservent $\mathbb{U}$ sont exactement celles des deux types précédents.

Théorème : les seules homographies conservant $\mathbb{U}$ sont $z \mapsto e^{i\theta}/z$ et $z \mapsto e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}$ avec $|\alpha| \neq 1$.

Problème 1

A Deux exemples, études classiques

1. Soit A, B deux points du plan complexe d'affixes respectives a et b .

(a) $\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$, privé de B (voir cours).

(b) $\frac{d-a}{d-b} = i \Leftrightarrow AD = BD$ et $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}) = \frac{\pi}{2}$. De même $AF = BF$ et $(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FA}) = -\frac{\pi}{2}$. Donc ABF et ABD sont les deux triangles rectangles isocèles portés par l'hypoténuse $[AB]$. Ils forment un quadrilatère aux quatre côtés de même longueur et quatre angles droits. Donc $ADBF$ est un carré.

2. ABC est équilatéral si et seulement s'il est isocèle avec un angle de $\pm \frac{\pi}{3}$. Ceci équivaut à $AB = AC$ et

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{3}, \text{ i.e. } \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = 1 \text{ et } \text{Arg} \left(\frac{c-a}{b-a} \right) = \pm \frac{\pi}{3}, \text{ soit encore } \frac{c-a}{b-a} \in \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\}.$$

B Autour de l'inégalité triangulaire

3. **Initialisation** : pour $n = 2$, l'inégalité est vérifiée, c'est l'inégalité triangulaire classique.

Hérédité : soit $n \geq 2$. Supposons que

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$$

Pour tous $z_1, \dots, z_{n+1} \in \mathbb{C}$, on applique l'inégalité triangulaire avec $z = z_1 + \dots + z_n$ et $z' = z_{n+1}$. Ainsi,

$$|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| \leq |z_1 + \dots + z_n| + |z_{n+1}|.$$

Puis on applique l'hypothèse de récurrence au premier de ces deux termes. D'où

$$|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| \leq |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

CQFD.

4. Cas d'égalité dans le cas $n = 2$.

(a)

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \\ &\Leftrightarrow |z_1|^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = 2|z_1||z_2| \end{aligned}$$

Ainsi, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = |z_1||z_2|$.

(b) On a donc $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = |z_1||z_2|$.

Or pour $Z \in \mathbb{C}$, $|Z| = \operatorname{Re} Z$ si et seulement si $\sqrt{x^2 + y^2} = x$ (en posant $Z = x + iy$), ce qui équivaut à $y = 0$ et $x \geq 0$, soit $Z \in \mathbb{R}_+$.

Donc on a

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow \bar{z}_1 z_2 \in \mathbb{R}_+ \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Arg}(\bar{z}_1 z_2) \equiv 0 [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Arg}(\bar{z}_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \equiv 0 [2\pi] \\ &\Leftrightarrow -\operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \equiv 0 [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Arg}(z_1) \equiv \operatorname{Arg}(z_2) [2\pi]. \end{aligned}$$

5. On suppose la propriété vraie au rang n , c'est à dire :

$$|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n| \text{ si et seulement si } \operatorname{Arg}(z_1) \equiv \dots \equiv \operatorname{Arg}(z_n) [2\pi].$$

Soient $z_1, \dots, z_{n+1}$ des nombres complexes tels que

$$|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| = |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

(a) On a, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| \leq |z_1 + \dots + z_n| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|$$

Les deux termes extrémaux étant égaux, toutes les inégalités sont des égalités.

Ainsi $|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| \leq |z_1 + \dots + z_n| + |z_{n+1}|$ et $|z_1 + \dots + z_n| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|$.

Donc $|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| \leq |z_1 + \dots + z_n| + |z_{n+1}|$ et $|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$.

- (b) D'après l'hypothèse de récurrence, la deuxième de ces égalités montre que $\text{Arg}(z_1) \equiv \dots \equiv \text{Arg}(z_n) [2\pi]$. Tous ces arguments étant égaux, l'argument de la somme de ces nombres est aussi le même, on a alors $\text{Arg}(z_1 + \dots + z_n) \equiv \text{Arg}(z_1) [2\pi]$ (géométriquement, les vecteurs associés sont colinéaires).

D'après la question (4b), la première des deux égalités précédentes donne $\text{Arg}(z_1 + \dots + z_n) \equiv \text{Arg}(z_{n+1}) [2\pi]$.

Finalement $\boxed{\text{Arg}(z_1) \equiv \dots \equiv \text{Arg}(z_{n+1}) [2\pi]}$.

On a donc démontré par récurrence une condition nécessaire et suffisante au cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire :

$\boxed{\text{on a égalité si et seulement si les arguments des nombres considérés sont égaux modulo } 2\pi}$.

C Caractérisation d'un polygone régulier

6. Supposons tout d'abord que le polygone $M_1 \dots M_n$ est régulier et posons $z_1 = \rho e^{i\theta}$.

- (a) Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $\boxed{|z_k| = \rho}$.

La relation $(\overrightarrow{OM_{k-1}}, \overrightarrow{OM_k}) = \frac{2\pi}{n}$, se traduit par $\text{Arg}\left(\frac{z_k}{z_{k-1}}\right) = \text{Arg}(z_k) - \text{Arg}(z_{k-1}) = \frac{2\pi}{n}$. Donc les arguments des z_k suivent une progression arithmétique.

D'où $\boxed{\text{Arg}(z_k) = \theta + (k-1)\frac{2\pi}{n}}$.

- (b) Sous forme exponentielle, cela donne $z_k = \rho e^{i(\theta + (k-1)\frac{2\pi}{n})}$, soit $z_k = z_1 \omega^{k-1}$.
Donc pour tout $1 \leq k \leq n$, $\omega^{n+1-k} z_k = \omega^n z_1 = z_1$.

Finalement, $\boxed{\sum_{k=1}^n \omega^{n+1-k} z_k = n z_1}$.

7. On suppose maintenant réciproquement que $\sum_{k=1}^n \omega^{n+1-k} z_k = n z_1$.

- (a) On a alors $\left| \sum_{k=1}^n \omega^{n+1-k} z_k \right| = |n z_1| = \boxed{n\rho}$.

On constate alors que $\left| \sum_{k=1}^n \omega^{n+1-k} z_k \right| = \sum_{k=1}^n |\omega^{n+1-k} z_k|$. On est dans un cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.

D'après la partie précédente, les arguments de tous les termes de cette somme sont égaux, à savoir

$$\forall k \in \{1 \dots n\}, \text{Arg}(\omega^{n+1-k} z_k) \equiv \text{Arg}(z_1) [2\pi].$$

- (b) Cette relation donne, pour tout $1 \leq k \leq n-1$, $\text{Arg}(\omega^{n+1-(k+1)} z_{k+1}) - \text{Arg}(\omega^{n+1-k} z_k) \equiv 0 [2\pi]$.

D'où $\text{Arg}(z_{k+1}) - \text{Arg}(z_k) \equiv \text{Arg}(\omega) = \frac{2\pi}{n}$.

D'où, en termes d'angles, $\boxed{(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \frac{2\pi}{n}}$.

De plus on a bien $\boxed{(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{2\pi}{n}}$ car $\text{Arg}(\omega z_n) = \text{Arg}(z_1)$. Le polygone est bien régulier.

D Le cas d'un triangle équilatéral

Soient A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c . On rappelle la notation $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Le but de cette partie est de montrer que ABC est un polygone régulier (un triangle équilatéral dans le cas de trois points) si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

8. $1, j$ et j^2 sont les racines troisièmes de l'unité, donc leur somme vaut $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$.

9. On suppose tout d'abord que $a + jb + j^2c = 0$.

En écrivant $1 = -j - j^2$, on obtient $a(-j - j^2) + jb + j^2c = 0$.

Alors $j(b - a) + j^2(c - a) = 0$, d'où $\frac{c - a}{b - a} = -\frac{1}{j} = -j^2$.

Le module nous donne $\boxed{AC = AB}$ et l'argument $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{Arg}(-j^2) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$.

Le triangle ABC est isocèle avec un angle de $\pi/3$. Il est donc $\boxed{\text{équilatéral}}$.

10. Réciproquement, on suppose maintenant que le triangle ABC est équilatéral.

(a) Comme ABC est régulier, la condition nous donne, avec $n = 3$, $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$, $z_1 = a$, $z_2 = b$ et $z_3 = c$, $a + j^2b + jc = 3a$. De même, on obtient $b + j^2c + ja = 3b$ et $c + j^2a + jb = 3c$ comme suggéré par l'indication. On combine ces trois équations :

$$3(a + jb + j^2c) = (a + j^2b + jc) + j(b + j^2c + ja) + j^2(c + j^2a + jb) = 3(1 + j + j^2)(a + b + c) = 0.$$

Donc $\boxed{a + jb + j^2c = 0}$.

(b) On a $a' + jb' + j^2c' = a + jb + j^2c - \frac{a + b + c}{3} \underbrace{(1 + j + j^2)}_{=0} = a + jb + j^2c$.

Donc $\boxed{a' + jb' + j^2c' = 0 \text{ si et seulement si } a + jb + j^2c = 0}$.

$\frac{a + b + c}{3}$ est l'affixe de G , centre de gravité du triangle ABC . Ce triangle est équilatéral donc

$GA = GB = GC$. C'est-à-dire $\boxed{|a'| = |b'| = |c'|}$.

Pour finir, sous notre hypothèse (ABC équilatéral), on remarque que a', b', c' sont les affixes des sommets A', B', C' d'un triangle équilatéral également, image de ABC par la translation d'un vecteur d'affixe $\frac{a + b + c}{3}$.

De plus, $|a'| = |b'| = |c'|$. On peut donc leur appliquer la question (10a) et en déduire que $a' + jb' + j^2c' = 0$, ce qui implique, d'après le début de cette question (10b), que $\boxed{a + jb + j^2c = 0}$.