TD C1. Ensembles et applications

1 Ensembles

Exercice C1.1

Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a,b\}))$ (rappel : $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E).

Exercice C1.2

Écrire en extension les ensembles $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

Exercice C1.3 ✿

Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer les assertions suivantes

1. $A \subset \overline{B} \Leftrightarrow B \subset \overline{A}$,
2. $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subset A$,
3. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$,
4. $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow (B \subset A$ et $A \subset C)$.

Exercice C1.4 ✿

Notation. On note $\neg P$ la négation de l'assertion P.

Soit E un ensemble. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses pour toutes parties A, B, C de E ?

1. $(A \subset B) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$,
2. $\neg(A \subset B) \Rightarrow (B \subset A)$,
3. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$,
4. $(A \cap B = A \cap C) \Leftrightarrow (A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C})$.

Exercice C1.5 ✿

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$ deux recouvrements disjoints de E (I et J étant eux-même des ensembles).
Montrer que $(A_i \cap B_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est également un recouvrement disjoint de E.

2 Applications

Exercice C1.6

1. Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ?

   (a) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \end{array}$, (b) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$, (c) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

2. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ?

   (a) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$, (b) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$, (c) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (2x+y, x-3y) \end{array}$.

3. Les fonctions suivantes sont-elles bijectives ? Si c'est possible, donner une expression de leur bijection réciproque.

(a) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-3y, x+2y) \end{array}$, (b) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y,z,x) \end{array}$, (c) $\begin{array}{rcl} \varphi:\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & 2f+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \end{array}$.

Exercice C1.7 ✲

L'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice C1.8

Soit $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ telles que $g \circ f$ et $h \circ g$ soient bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice C1.9 ✲

Soit $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice C1.10 ✲

Soit $f : E \to F$.

1. Montrer que si $A \subset E$, alors $A \subset f^{-1}(f(A))$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte. À quelle condition sur f peut-on avoir égalité ?
2. Montrer que si $B \subset F$, alors $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte. À quelle condition sur f peut-on avoir égalité ?
3. Soient A_1, A_2 deux parties de E.
   (a) Montrer que
   $$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$
   Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
   (b) Soient A_1, A_2 deux parties de E. Montrer que
   $$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$
4. Soient B_1, B_2 deux parties de F.
   (a) Montrer que
   $$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$
   (b) Montrer que
   $$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Exercice C1.11 ✲

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. On définit $F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}_+) \\ x & \mapsto & f([0,x]) \end{array}$. Montrer que si f est injective, alors F est injective.

Exercice C1.12 ✲✲

Étant donnée $f : E \to F$, on note

$$f_d : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} \quad \text{et} \quad f_r : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(F) & \to & \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{(-1)}(B) \end{array}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si f_d est injective.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si f_r est injective.

3 Relations binaires

Exercice C1.13

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe d'équivalence de x.

Exercice C1.14 ✿

On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation binaire $\sim$ par : $\forall p, q \in \mathbb{Z},\ p \sim q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z},\ 2^n p = q$.
Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence et donner la classe d'équivalence de 0, 1, -1, 28.

Exercice C1.15

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire les classes d'équivalence pour cette relation.

Exercice C1.16 ✿

Soit E muni d'une relation d'ordre notée $\leqslant$. Étant donné un ensemble X, on note $F = \mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble des fonctions de X dans E.
On définit sur F la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall f, g \in F,\ f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \forall x \in X,\ f(x) \leqslant g(x).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur F. Est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice C1.17

Soit E un ensemble. On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'**ordre strict** lorsqu'elle est transitive, antisymétrique et **irréflexive** (*i.e.* $\forall x \in E$, on n'a pas $x\mathcal{R}x$).
Soit $\leqslant$ une relation d'ordre sur E. On définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x \leqslant y \text{ et } x \neq y).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre strict sur E.
Remarque. Ceci montre qu'une relation d'ordre permet toujours de définir une relation d'ordre strict, dont on dit qu'elle lui est associée.

Exercice C1.18 ✿✿

Soit E, F deux ensembles munis chacun d'une relation d'ordre, notées respectivement $\leqslant_E$ et $\leqslant_F$. On note $<_E$ et $<_F$ les relations d'ordre strict associées (voir exercice ci-dessus). On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est

- **croissante** lorsque $\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 \leqslant_E x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant_F f(x_2)$,
- **strictement croissante** lorsque $\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 <_E x_2 \Rightarrow f(x_1) <_F f(x_2)$.

1. Écrire les définitions d'une fonction décroissante et strictement décroissante.
2. Soit $E = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ l'ensemble des parties non vides de $\mathbb{N}$ muni de l'inclusion (qui, rappelons-le, est une relation d'ordre). On munit $\mathbb{N}$ de la relation d'ordre usuelle et on définit l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & A & \longmapsto & \min(A) \end{array}.$$

   Montrer que φ est décroissante. Est-elle strictement décroissante ?
3. Soit E un ensemble. On munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation d'ordre $\subset$ et on définit l'application

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & A & \longmapsto & \overline{A} \end{array}.$$

   Montrer que ψ est décroissante. Est-elle strictement décroissante ?