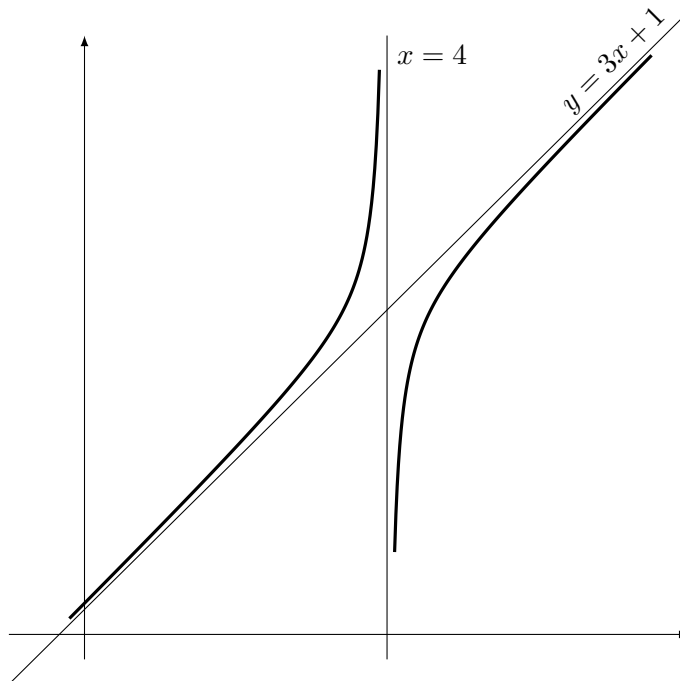


Exercice 1

1. Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Vrai ou faux ? (Justifier)
 - (a) VRAI. D'une part $g \circ f$ est définie sur $[-1, 1]$, centré en 0.
D'autre part, $\forall x \in [-1, 1]$, $(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Donc $g \circ f$ est paire.
 - (b) FAUX. Par exemple avec $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x$ impaires, $g \circ f : x \mapsto x$ n'est pas paire.
 - (c) FAUX. Il suffit de choisir n'importe quelle fonction $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ bijective qui n'est pas impaire. Alors avec $g = f^{-1}$, on a $g \circ f : x \mapsto x$ qui est impaire, alors ni f ni g ne l'est. Par exemple $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{2} - 1$.
2. Soit $f : x \mapsto \frac{3x^2 - 11x - 5}{x - 4}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
 - (a) L'ensemble de définition et de dérivabilité de f est $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ (invoquer le quotient).
 - (b) Par propriété des fractions rationnelles, on étudie les limites en $\pm\infty$ de $\frac{3x^2}{x} = 3x$.
Ainsi, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$.
Par quotient (remarquer que $3 \times 4^2 - 11 \times 4 - 5 < 0$), $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 4^+} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 4^-} +\infty$.
 - (c) D'une part, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale en $x = 4$.
D'autre part, elle admet $y = 3x + 1$ pour asymptote oblique en $\pm\infty$.
 - (d) Voici une allure de $\mathcal{C}_f$ (attention, repère non orthonormé : les ordonnées sont 3 fois plus condensées que les abscisses).



3. Soit $g : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$.

(a) $\ln$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$x \mapsto x^2 - 1$ est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x^2 - 1 > 0$ pour $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Par composition, g est définie et dérivable sur $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

(b) Pour tout $x \in D$, $g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$, négatif pour $x < -1$, positif pour $x > 1$.

Ainsi, g est strictement décroissante sur $] -\infty, -1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

g étant continue sur ces deux intervalles, on peut par exemple choisir $g|_{]1, +\infty[}$, bijective.

(c) Comme $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\infty$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tous $x \in]1, +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$, $y = g(x) \Leftrightarrow y = \ln(x^2 - 1)$.

Ainsi $y = g(x) \Leftrightarrow e^y = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 = e^y + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{e^y + 1}$ car x est pris dans $]1, +\infty[$.

D'où l'expression de la bijection réciproque : $x \mapsto \sqrt{e^x + 1}$.

Remarque. On aurait pu faire le choix de la bijection décroissante $g|_{]-\infty, -1[}$, qui aurait alors induit le choix de la racine négative dans l'expression de x en fonction de y .

Problème 1

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions qui le sont.

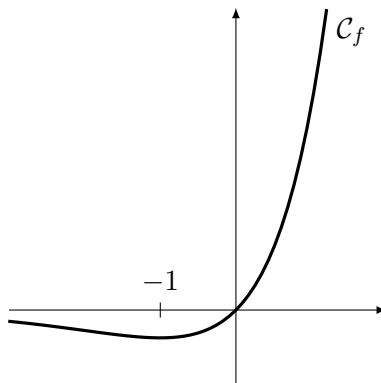
$$x \mapsto xe^x$$

1. Par produit, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et par croissances comparées, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$. Comme e^x est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $1+x$. D'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

3.



4. f est continue et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. De plus $f(-1) = -\frac{1}{e}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc elle réalise une bijection de $I = [-1, +\infty[$, à valeurs dans $J = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

On note W la bijection réciproque de $f|_I$.

Étude plus complète de la fonction W

5. $f(1) = e$, $f(0) = 0$ et $f(-1) = -\frac{1}{e}$. Donc $W(e) = 1$, $W(0) = 0$ et $W(-1/e) = -1$.
6. $f|_I$ est strictement croissante donc W l'est sur J . De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = +\infty$.
Finalement :

x	$-\frac{1}{e}$	0	e	$+\infty$
$W(x)$	-1	0	1	$+\infty$

7. Ainsi, $W(x)$ est positif si $x > 0$, négatif si $x < 0$ et nul si $x = 0$.

8. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Donc W n'est pas dérivable en $f(-1) = -\frac{1}{e}$, mais l'est partout ailleurs. Ainsi

W est dérivable sur $]-\frac{1}{e}, +\infty[$ et pour tout $x \in]-\frac{1}{e}, +\infty[$,

$$W'(x) = \frac{1}{f'(W(x))} = \frac{1}{W(x)e^{W(x)} + e^{W(x)}} = \frac{1}{e^{W(x)}(1 + W(x))}.$$

Or $f(W(x)) = W(x)e^{W(x)} = x$. Donc $\frac{1}{e^{W(x)}} = \frac{W(x)}{x}$ pour $x \neq 0$. Et cela donne $W'(x) = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}$.

9. On pose $h : x \mapsto W(x) - \ln(x)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h'(x) = W'(x) - \frac{1}{x} = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \left(\frac{W(x)}{1 + W(x)} - 1 \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{-1}{1 + W(x)} \right).$$

D'après ce qui précède, $h'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ donc h est décroissante sur cet intervalle. Or $h(e) = 0$. Donc $\forall x \geq e, W(x) \leq \ln(x)$.

*La fonction W dite **de Lambert** est très intéressante pour ses propriétés mathématiques, utilisée pour résoudre des équations mettant en jeu des puissances, mais trouve aussi de nombreuses applications en physique, comme en électronique (circuits diode/résistance) ou en physique des particules. Elle valait donc bien qu'on s'y attarde ! Sans compter que Lambert est un des pionniers de l'étude de la trigonométrie hyperbolique !*

Problème 2

Prérequis

- Voir cours.
- Partie gauche, voir cours également. Appliquer l'inégalité triangulaire à $|z| = |(z + z') - z'|$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p < q$. Alors $|z^p| = |z|^p < |z|^q = |z^q|$, d'où $|z^p| < |z^q|$.

Le problème

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Par inégalité triangulaire, $|A(z)| \leq \sum_{k=1}^n |a_k - a_{k-1}| |z|^k + |a_0|$.

Or $a_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall 1 \leq k \leq n$, $a_k \geq a_{k-1}$. Donc

$$|A(z)| \leq \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) |z|^k + a_0.$$

5. Si de plus $|z| > 1$, alors $\forall 1 \leq k \leq n$, $1 \leq |z|^k \leq |z|^n$.

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) |z|^k + a_0 \leq |z|^n \left(\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) + a_0 \right).$$

Après télescopage, $|A(z)| \leq a_n |z|^n$.

6.

$$\begin{aligned} (z-1)P(z) &= \sum_{k=0}^n a_k z^{k+1} - \sum_{k=0}^n a_k z^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} z^k - \sum_{k=0}^n a_k z^k \\ &= a_n z^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^n (a_{k-1} - a_k) z^k}_{A(z)} - a_0. \end{aligned}$$

Finalement, à l'aide de la question 2,

$$|(z-1)P(z)| \geq a_n |z|^{n+1} - |A(z)|.$$

7. D'après l'inégalité de la question 5, si $|z| > 1$, alors $|(z-1)P(z)| \geq a_n |z|^{n+1} - a_n |z|^n$.

$$\text{Donc } |(z-1)P(z)| \geq a_n |z|^n (|z| - 1).$$

8. Si z est de module supérieur à 1 et racine de P , alors d'après ce qui précède, $0 \geq a_n |z|^n (|z| - 1)$. Comme $a_n |z|^n \geq 0$, on a $|z| - 1 \leq 0$, ce qui est contradictoire.

Ainsi, toutes les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1.

Problème 3

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le cosinus de z par

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

et on appelle $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction cosinus complexe définie par $\Phi(z) = \cos z$.

A Préliminaire

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(x + iy) = \frac{1}{2}(e^{ix-y} + e^{-ix+y}) = \frac{1}{2}(e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}).$$

$$\text{D'où } \operatorname{Re}(\cos(x + iy)) = \frac{1}{2}(e^{-y} \cos x + e^y \cos x) = \cos x \operatorname{ch} y$$

$$\text{et } \operatorname{Im}(\cos(x + iy)) = \frac{1}{2}(e^{-y} \sin x - e^y \sin x) = \sin x \operatorname{sh} y.$$

$$\text{Donc } \boxed{\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y}.$$

B Parties adaptées, exemples

On note dans la suite argch la réciproque de $\operatorname{ch}|_{\mathbb{R}_+}$.

2. Soit $A_1 = [0, \pi]$. $\forall x \in [0, \pi]$, $\Phi(x) = \cos x$ (cosinus usuel sur $\mathbb{R}$) et $\cos$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.

$$\text{Donc } \boxed{A_1 \text{ est adaptée et } \Phi_{A_1}^{-1} = \operatorname{Arccos}}.$$

3. Soit $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } \operatorname{Im} z > 0\}$.

$\forall z \in A_2$, on écrit $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\Phi(z) = \Phi(iy) = \operatorname{ch}(y) \in \mathbb{R}_+^*$.

Et $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$, $u = \Phi(z) \Leftrightarrow y = \operatorname{argch}(u) \Leftrightarrow z = i \operatorname{argch}(u)$.

$$\text{Donc } \boxed{A_2 \text{ est adaptée et } \Phi_{A_2}^{-1} : u \mapsto i \operatorname{argch}(u)}.$$

4. Soit $A_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \pi \text{ et } \operatorname{Im} z < 0\}$.

$\forall z \in A_3$, on écrit $z = \pi + iy$ avec $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\Phi(z) = \Phi(\pi + iy) = -\operatorname{ch}(y) \in \mathbb{R}_-^*$.

Et $\forall u \in \mathbb{R}_-^*$, $u = \Phi(z) \Leftrightarrow -u = \operatorname{ch}(-y) \Leftrightarrow y = -\operatorname{argch}(-u) \Leftrightarrow z = \pi - i \operatorname{argch}(-u)$.

$$\text{Donc } \boxed{A_3 \text{ est adaptée et } \Phi_{A_3}^{-1} : u \mapsto \pi - i \operatorname{argch}(-u)}.$$

5. Soit $A_4 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. On admet que A_4 est adaptée à Φ .

$\Phi(A_1), \Phi(A_2)$ et $\Phi(A_3)$ sont deux à deux disjointes. $\Phi(A_4) = [-1, 1] \cup]1, +\infty[\cup]-\infty, -1[= \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Phi_{A_4}^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\ a &\mapsto \begin{cases} \operatorname{Arccos}(a) & \text{si } a \in [-1, 1] \\ i \operatorname{argch}(a) & \text{si } a \in [1, +\infty[\\ \pi - i \operatorname{argch}(-a) & \text{si } a \in]-\infty, -1] \end{cases} \end{aligned}$$

C Résolution de l'équation $\cos z = a$

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

6. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \cos z = a &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = a \\ &\Leftrightarrow e^{2iz} + 1 = 2ae^{iz} \\ &\Leftrightarrow e^{iz} \text{ est solution de } \boxed{(E) : u^2 - 2au + 1 = 0} \end{aligned}$$

7. Le discriminant de (E) est $\Delta = 4a^2 - 4 = 4(a^2 - 1)$.

Comme $a \notin \mathbb{R}$, $\Delta \neq 0$ et (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes u_1 et u_2 .

De plus, $u_1 u_2 = 1$ et $u_1 + u_2 = 2a$. Si l'une des deux solutions était réelle, l'autre le serait aussi d'après leur produit. Mais alors leur somme serait réelle également, ce qui est impossible car $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

On a donc montré par l'absurde que les solutions ne sont pas réelles.

8. **Existence** Soit $u_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ avec $\rho_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_1 \in]-\pi, 0]$ ou $]0, \pi[$ (modulo 2π) car $y_1 \notin \mathbb{R}$.

- si $\theta_1 \in]0, \pi[$, alors $\rho_a = \rho_1$ et $\theta_a = \theta_1$ conviennent.
- si $\theta_1 \in]-\pi, 0[$, alors $u_2 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}$. Alors $\rho_a = \frac{1}{\rho_1}$ et $\theta_a = -\theta_1$ conviennent.

Unicité Soit $\rho_a e^{i\theta_a}$ et $\rho'_a e^{i\theta'_a}$ deux solutions de (E) avec (ρ_a, θ_a) et (ρ'_a, θ'_a) dans $]0, +\infty[\times]0, \pi[$. Alors ces deux solutions sont soit égales soit u_1 et u_2 inverses l'une de l'autre.

- Si elles sont égales, alors $\rho_a = \rho'_a$ et $\theta_a = \theta'_a \bmod 2\pi$.
Or $\theta - \theta' \in]-\pi, \pi[$ donc $\theta_a - \theta'_a = 0$, soit $\theta_a = \theta'_a$.

- Sinon, $\rho_a e^{i\theta_a} = \frac{1}{\rho'_a e^{i\theta'_a}} = \frac{1}{\rho'_a} e^{-i\theta'_a}$.

Donc $\theta_a = -\theta'_a \bmod 2\pi$, d'où $\theta_a + \theta'_a = 0 \bmod 2\pi$. Or $\theta_a + \theta'_a \in]0, 2\pi[$, ce qui est impossible.

Donc il existe un unique couple $(\rho_a, \theta_a) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[$ tel que $\rho_a e^{i\theta_a}$ soit solution de (E) .

9. Supposons que $\rho_a \neq 1$. Alors les deux solutions sont $e^{i\theta_a}$ et $\frac{1}{e^{i\theta_a}}$. Donc leur somme est $2\cos(\theta_a)$, qui est réelle, ce qui est impossible car $a \notin \mathbb{R}$.

On a donc montré par l'absurde que $\rho_a \neq 1$.

10. Soit $A_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in]0, \pi[\text{ et } \operatorname{Im} z \neq 0\}$.

$\cos z = a \Leftrightarrow e^{iz}$ est solution de $(E) \Leftrightarrow e^{iz} = \rho_a e^{i\theta_a}$ ou $e^{iz} = \frac{1}{\rho_a} e^{-i\theta_a}$.

$$\begin{aligned} \text{Or, étant donnés } \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}, e^{iz} = \rho e^{i\theta} &\Leftrightarrow e^{-y} e^{ix} = \rho e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow e^{-y} = \rho \text{ et } x = \theta \bmod 2\pi \\ &\Leftrightarrow y = -\ln \rho \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, x = \theta + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = \theta + 2k\pi - i \ln \rho \end{aligned}$$

Donc ici, $\cos z = a \Leftrightarrow z = \theta_a + 2k\pi - i \ln \rho_a$ ou $z = -\theta_a + 2k\pi + i \ln \rho_a$.

Or pour $\theta_a \in]0, \pi[$ et $k \in \mathbb{Z}$, $-\theta + 2k\pi \notin]0, \pi[$ et $\theta + 2k\pi \in]0, \pi[\Leftrightarrow k = 0$.

$\cos z = a$ a donc pour unique solution dans A_5 : $\zeta(a) = \theta_a - i \ln(\rho_a)$

11. Pour $a = i$, l'équation (E) est $u^2 - 2iu + 1 = 0$ qui a pour discriminant $-8 = (2\sqrt{2}i)^2$.

Donc $u_1 = i + i\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})i = (1 + \sqrt{2})e^{i\pi/2}$ et $u_2 = (1 - \sqrt{2})i$.

Donc $\theta_i = \frac{\pi}{2}$ et $\rho_i = 1 + \sqrt{2}$. D'où $\zeta(i) = \frac{\pi}{2} - i \ln(1 + \sqrt{2})$.

12. Soit $(E') : u^2 + 2au + 1 = 0$ dont les solutions sont notées u'_1 et u'_2 .

Or x est solution de (E') si et seulement si $(-x)^2 - 2a(-x) + 1 = 0$
si et seulement si $-x$ est solution de (E) .

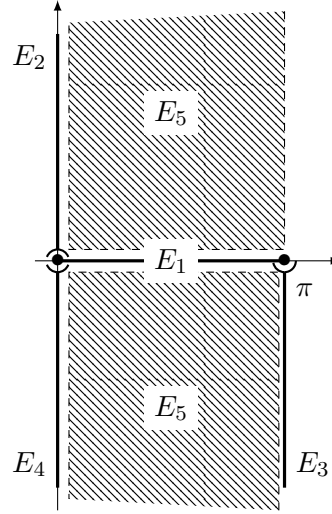
Donc les solutions de (E') sont $\left\{ -\rho_a e^{i\theta_a}, -\frac{1}{\rho_a} e^{-i\theta_a} \right\}$, soit $\left\{ \rho_a e^{i(\pi+\theta_a)}, \frac{1}{\rho_a} e^{i(\pi-\theta_a)} \right\}$.

Comme $\pi + \theta_a \notin]0, \pi[$ et $\pi - \theta_a \in]0, \pi[$, on retient $u'_1 = \frac{1}{\rho_a} e^{i(\pi-\theta_a)}$ avec $\rho_{-a} = \frac{1}{\rho_a}$ et $\theta_{-a} = \pi - \theta_a$.

D'où $\zeta(-a) = \pi - \theta_a - i \ln \left(\frac{1}{\rho_a} \right) = \pi - \theta_a + i \ln \rho_a$. Finalement, $\zeta(-a) = \pi - \zeta(a)$.

D Il est temps de conclure

13.



14. Soit $z \in A_5$ sous forme algébrique : $z = x + iy$ avec $x \in]0, \pi[$ et $y \neq 0$.

$\Phi(z)$ a pour partie imaginaire $-\sin x \operatorname{sh} y \neq 0$ (car $x \neq 0$ et $y \neq 0$).

Donc $\Phi(z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Réciproquement, soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors d'après la partie précédente, il existe (un unique) $z \in A_5$ tel que $\Phi(z) = a$. Donc $a \in \Phi(A_5)$.

On a donc montré que $\boxed{\Phi(A_5) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}$.

15. $\Phi(A_6) = \Phi(A_4) \cup \Phi(A_5)$. Donc $\boxed{\Phi(A_6) = \mathbb{C}}$.

16. D'après les deux parties précédentes, on définit la fonction arccosinus complexe par

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{C} &\rightarrow A_6 \\ a &\mapsto \begin{cases} \operatorname{Arccos}(a) & \text{si } a \in [-1, 1] \\ i \operatorname{argch}(a) & \text{si } a \in [1, +\infty[\\ \pi - i \operatorname{argch}(-a) & \text{si } a \in]-\infty, -1] \\ \zeta(a) & \text{si } a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

17. **1^{er} cas :** $a \in [-1, 1]$. Alors $\Gamma(a) + \Gamma(-a) = \operatorname{Arccos}(a) + \operatorname{Arccos}(-a)$.

Or $\pi - \operatorname{Arccos}(a) \in [0, \pi]$ et $\cos(\pi - \operatorname{Arccos}(a)) = -a$. Donc $\Gamma(a) + \Gamma(-a) = \pi$.

2^e cas : $a \in]1, \infty[$. Alors $-a \in]-\infty, -1[$.

Donc $\Gamma(a) + \Gamma(-a) = i \operatorname{argch}(a) + \pi - i \operatorname{argch}(a) = \pi$.

3^e cas : $a \in]-\infty, -1[$. Alors de même $\Gamma(a) + \Gamma(-a) = \pi - i \operatorname{argch}(-a) + i \operatorname{argch}(-a) = \pi$.

4^e cas : $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors $\Gamma(a) + \Gamma(-a) = \zeta(a) + \zeta(-a) = \pi$.

Conclusion : $\boxed{\forall a \in \mathbb{C}, \Gamma(a) + \Gamma(-a) = \pi}$.