

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Définition 1

On dit que deux ensembles E et F sont **équipotents** lorsqu'il existe une bijection $f : E \rightarrow F$.

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème suivant et de l'appliquer pour montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents. La dernière partie montre que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents (on aura eu besoin de ce résultat dans la partie précédente).

Théorème 2 (Cantor-Bernstein, 1896)

Soient E, F des ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E , alors il existe une bijection de E dans F .

Un théorème de point fixe

Soit E un ensemble et $\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \Rightarrow \Phi(A) \subset \Phi(B).$$

Le but de cette partie est de montrer que Φ possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\Phi(X) = X$. Pour cela, on pose :

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \Phi(A) \subset A\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{A} \neq \emptyset$.
2. Soit $A \in \mathcal{A}$. Montrer que $\Phi(A) \in \mathcal{A}$.
3. On pose $X = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$.
 - (a) Montrer que $X \in \mathcal{A}$.
 - (b) Conclure.

Démonstration du théorème de Cantor-Bernstein

Soit E, F deux ensembles, et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux application injectives. On souhaite montrer qu'il existe une application bijective de E dans F .

4. Considérons l'application $\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$

$$A \mapsto E \setminus g(F \setminus f(A)).$$

- (a) Vérifier que Φ est bien définie.
 - (b) Montrer que Φ admet un point fixe X .
5. Soit $\tilde{g} : F \setminus f(X) \longrightarrow E \setminus X$.
- $$x \longmapsto g(x)$$

- (a) Montrer que $\tilde{g}$ est bien définie.
- (b) Montrer que $\tilde{g}$ est bijective

6. Soit $h : E \rightarrow F$ l'application définie par :

$$\forall x \in E, h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ \tilde{g}^{-1}(x) & \text{si } x \notin X \end{cases}$$

- (a) Montrer que h est bien définie.
- (b) Montrer que h est bijective et en déduire le théorème de Cantor-Bernstein.

Une application

On souhaite montrer que les ensembles $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents.

- 7. Déterminer une application f injective de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
- 8. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \mathbb{N}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longmapsto \{(n, u_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Montrer que Ψ est bien définie et injective.

- 9. Montrer que les ensembles $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ sont équipotents.
On pourra admettre temporairement que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents.
- 10. Conclure.

Une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$

Soit $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$.

$$(a, b) \longmapsto a + \binom{a+b+1}{2}.$$

- 11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels strictement croissante. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq u_n$.
- 12. Soit $p \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer qu'il existe un unique $c \in \mathbb{N}$ tel que $\binom{c+1}{2} \leq p < \binom{c+2}{2}$.
 - (b) On pose $a = p - \binom{c+1}{2}$ et $b = c - a$. Montrer que $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $f(a, b) = p$.
- 13. Dédurre des questions précédentes que f est bijective.