Chapitre B3

Intégration et équations différentielles

Objectifs

- Notion d'intégrale, vision géométrique et vision calculatoire.
- Lien entre primitives et calcul d'intégrales.
- Calcul pratique d'intégrales.
- Structure des solution d'une équation différentielle.
- Résolution pratique des EDL usuelles.

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle véritable de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Primitives et intégrale

Définition B3.1

(i) Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On appelle **partie réelle** et **partie imaginaire** de f les applications $\operatorname{Re} f : x \mapsto \operatorname{Re}(f(x))$ et $\operatorname{Im} f : x \mapsto \operatorname{Im}(f(x))$.

(ii) On dit que f est **dérivable** en $x \in I$ si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont et on pose

$$f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x).$$

Définition B3.2

Soit $f, F : I \to \mathbb{K}$. On dit que F est **une primitive** de f sur I si F est une fonction dérivable sur I et que $F' = f$.

Théorème B3.3

(i) Toute fonction continue sur I admet une primitive.

(ii) Les primitives de la fonction nulle sont les fonctions constantes.

Proposition B3.4

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction.

(i) Si F est une primitive de f sur I, alors $G : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si et seulement si $G - F$ est constante.

(ii) Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Notation. Soit $a, b \in I$, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et F une primitive de f. On note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Formules générales

Proposition B3.5 (Chasles)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a, b, c \in I$. Alors

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition B3.6 (Linéarité)

Soient f et g deux fonctions continues sur I dans $\mathbb{K}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition B3.7 (Positivité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I$, $f(x) \geqslant 0$ et soit $a < b$ dans I. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Corollaire B3.8 (Croissance)

Soient f et g deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$ et soit $a < b$ dans I. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition B3.9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et de signe constant et soit $a \neq b$ dans I. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Théorème B3.10 (Inégalité triangulaire)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et soit $a, b \in I$.

(i) On a

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

(ii) Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a égalité si et seulement si f est de signe constant.

2.2 Techniques d'intégration

Définition B3.11

On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est **de classe $\mathcal{C}^1$** sur I lorsqu'elle est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.

Théorème B3.12 (Intégration par parties)

Soient $u, v : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a, b \in I$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème B3.13 (Changement de variable)

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \to I$ une fonction dont la dérivée est continue sur J. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $\alpha, \beta \in J$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

3 Équations différentielles

3.1 Généralités

Définition B3.14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **équation différentielle d'ordre** n une équation du type

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

où y est la fonction inconnue de la variable x et F est une fonction à $n+2$ variables $F : I \times \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$.
Une **solution sur** I de cette équation est une fonction $f : I \mapsto \mathbb{K}$, n fois dérivable sur I, qui vérifie

$$\forall x \in I,\ F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0.$$

Résoudre ou **intégrer** cette équation différentielle sur I, c'est donner toutes ses solutions sur I.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les **courbes intégrales** de cette équation sont les courbes représentatives de ses solutions.

Définition B3.15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **équation différentielle linéaire** une équation différentielle de la forme

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = b(x), \tag{E}$$

où $a_0, \ldots a_n$ et b sont des fonctions continues de I vers $\mathbb{K}$.
On dit que l'équation est **normalisée** lorsque a_n est constante égale à 1.
On dit que l'équation est **à coefficients constants** lorsque les fonctions $a_0, \ldots, a_n$ sont constantes.
L'équation **homogène** ou **sans second membre** associée à (E) est

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = 0. \tag{E_0}$$

Notation. On notera $\mathcal{S}_I$ les solutions sur I de l'équation (E) et $\mathcal{S}_{0,I}$ celles de l'équation (E_0).

Théorème B3.16 (Structure de $\mathcal{S}_{0,I}$)

(i) La fonction nulle est solution de (E_0)

(ii) Soit $f \in \mathcal{S}_{0,I}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda f \in \mathcal{S}_{0,I}$.

(iii) Soit $f, g \in \mathcal{S}_{0,I}$. Alors $f + g \in \mathcal{S}_{0,I}$.

Théorème B3.17 (Structure de $\mathcal{S}_I$)

Soit f_P une solution de (E). Pour toute fonction $f : I \to \mathbb{K}$ n fois dérivable, on a

$$f \in \mathcal{S}_I \Leftrightarrow (f - f_P) \in \mathcal{S}_{0,I}.$$

Autrement dit :

$$\mathcal{S}_I = \{f_P + f_0 \mid f_0 \in \mathcal{S}_{0,I}\}.$$

Théorème B3.18 (Superposition des solutions)

Soit b_1, b_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Soit $f_1 : I \to \mathbb{K}$ une solution de l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)} = b_1(x)$.

Soit $f_2 : I \to \mathbb{K}$ une solution de l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)} = b_2(x)$.

Alors $\lambda f_1 + \mu f_2$ est solution de l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)} = \lambda b_1(x) + \mu b_2(x)$.

Proposition B3.19 (Caractérisation de l'exponentielle)

Soit $a \in \mathbb{C}$. La fonction $f : x \mapsto e^{ax}$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et vérifiant $y(0) = 1$.

Définition et théorème B3.20

Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ et (E_0) l'équation différentielle à coefficients constants $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$.
On appelle **équation caractéristique** associée l'équation d'inconnue $r \in \mathbb{K}$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k r^k = 0. \tag{E_c}$$

Soit $r \in \mathbb{K}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E_0).

(ii) r est solution de (E_c).

3.2 Résolution d'une équation homogène

EDLH du 1^{er} ordre

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et (E_0) l'équation linéaire homogène du premier ordre

$$y' + a(x)y = 0.$$

Théorème B3.21

Soit A une primitive de a sur I. L'ensemble des solutions de (E_0) est

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

EDLH du 2^e ordre

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$ et (E_0) l'équation linéaire homogène du second ordre

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Soit (E_c) l'équation caractéristique associée et Δ son discriminant.

Théorème B3.22 (Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

- Si $\Delta \neq 0$, soit r_1, r_2 les solutions de (E_c). Les solutions de (E_0) sont

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}.$$

- Si $\Delta = 0$, soit r la solutions de (E_c). Les solutions de (E_0) sont

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}.$$

Théorème B3.23 (Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

- Si $\Delta > 0$, soit r_1, r_2 les solutions réelles de (E_c). Les solutions de (E_0) sont
$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$
- Si $\Delta = 0$, soit r la solution de (E_c). Les solutions de (E_0) sont
$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$
- Si $\Delta < 0$, soit r_1, r_2 les solutions complexes conjuguées de (E_c). En posant $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, les solutions de (E_0) sont
$$\begin{aligned}\mathcal{S}_0 &= \{x \mapsto (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))\, e^{\alpha x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \mapsto (A \cos(\beta x + \varphi))\, e^{\alpha x} \mid A, \varphi \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

3.3 Recherche d'une solution particulière

Cas d'une EDL à coefficients constants

Recherche d'une solution particulière sous la forme du second membre.

Variation de la constante

Théorème B3.24

Soit a, b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ et (E) l'équation linéaire du premier ordre
$$y' + a(x)y = b(x).$$
Soit C une primitive de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$. Alors $x \mapsto C(x)e^{-A(x)}$ est solution de (E).

3.4 Problème de Cauchy

Théorème B3.25

Soit a et b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. Étant donnés $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution sur I au problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

Théorème B3.26

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $d : I \to \mathbb{K}$ continue. Étant donnés $x_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution sur I au problème de Cauchy

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = d(x) \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0'. \end{cases}$$

Méthodes

- Comparaison d'intégrales.
- Calcul de primitive
  - ➢ en reconnaissant une dérivée usuelle,
  - ➢ par intégration par parties,
  - ➢ par changement de variable.
- Étudier une fonction définie par une intégrale.
- Résolution d'équations différentielles :
  - ➢ équations homogènes d'ordre 1 ou 2,
  - ➢ variation de la constante,
  - ➢ seconds membres usuels.