

**Problème 1**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Étant donnée  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonction continue, on appelle  $(u_n)$  la suite définie par 
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

**A Propriétés générales**

On suppose dans toute cette partie que  $f(I) \subset I$ . On dit que  $I$  est un intervalle **stable** par  $f$ . On se convaincra aisément que cela revient à la formulation équivalente suivante : pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \in I$ .

1. On procède par récurrence :  $u_0 \in I$  et pour  $n \in \mathbb{N}$ , si  $u_n \in I$ , alors  $u_{n+1} = f(u_n) \in I$  par stabilité.  
Donc  $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in I}$ .
2. On suppose dans cette question que  $f$  est croissante.
  - (a) On montre par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$ . Tout d'abord  $u_0 \leq u_1$ . Puis pour  $n \in \mathbb{N}$ , si  $u_n \leq u_{n+1}$ , alors par croissance de  $f$ ,  $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ . Donc  $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$ .  
Si  $u_0 \geq u_1$ , un raisonnement analogue montre que  $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$ .
  - (b) Dans le cas où  $I = [a, b]$  est borné (avec  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ ), avec  $u_0 \in I$ , comme  $f$  croissante,  $(u_n)$  est monotone d'après 2a. De plus,  $(u_n)$  est bornée par  $[a, b]$  d'après 1. Donc  $\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$ .
  - (c) On a la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n$ . Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $u_{n+1} \rightarrow \ell$  et par continuité de  $f$ ,  $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$ .  
Finalement  $\boxed{\ell = f(\ell)}$ .
3. On suppose dans cette question que  $f$  est décroissante. On pose, pour tout  $n$ ,  $v_n = u_{2n}$  et  $w_n = u_{2n+1}$ .
  - (a) Comme  $f(I) \subset I$ ,  $f(f(I)) \subset f(I)$  (résultat classique sur les images directes de deux parties incluses l'une dans l'autre, ou bien refaire le raisonnement dans le cas présent).  
Or  $f(I) \subset I$ . Donc  $f(f(I)) \subset I$ , et donc  $\boxed{I \text{ est un intervalle stable par } f \circ f}$ .
  - (b) Soit  $x \leq y$  deux réels. Par décroissance de  $f$ ,  $f(x) \geq f(y)$ , puis à nouveau :  $f(f(x)) \leq f(f(y))$ .  
Donc  $(f \circ f)(x) \leq (f \circ f)(y)$ , ce qui montre que  $\boxed{f \circ f \text{ est croissante}}$ .
  - (c)
    - $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n}))$ . Finalement  $\boxed{v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)}$ .
    - On obtient de même  $\boxed{w_{n+1} = (f \circ f)(w_n)}$ .
  - (d)
    - D'après la relation de récurrence précédente,  $f \circ f$  étant croissante,  $\boxed{(v_n) \text{ et } (w_n) \text{ sont monotones}}$ .
    - De plus par décroissance de  $f$ , si  $u_{2n} \leq v_{2n+2}$ , alors  $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}$ .  
Ainsi, si  $v_n \leq v_{n+1}$ , alors  $w_n \geq w_{n+1}$ .  
On a de même : si  $v_n \geq v_{n+1}$ , alors  $w_n \leq w_{n+1}$ .  
Ceci montre que  $\boxed{(v_n) \text{ et } (w_n) \text{ sont de monotonies contraires}}$ .
  - (e) Comme dans la question 2c, on passe à la limite dans la relation  $v_{n+1} = f(f(v_n))$  par continuité de  $f \circ f$ , ce qui donne  $\boxed{\ell = f(f(\ell))}$ .

## B Étude de deux exemples

4. On pose  $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$ .

- (a) • La fonction  $\sqrt{\phantom{x}}$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$ , dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  
 • La fonction  $x \mapsto x+2$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  (polynôme) et  $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ .

Par composition,  $f$  est définie sur  $[-2, +\infty[$  et dérivable sur  $] -2, +\infty[$ .

Elle est strictement croissante sur  $] -2, +\infty[$  et on a les valeurs  $f(-2) = 0$ ,  $f(0) = \sqrt{2}$  et  $f(2) = 2$ , ainsi que la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Donc  $f([0, 2]) = [\sqrt{2}, 2] \subset [0, 2]$  et  $f([2, +\infty[) = ]2, +\infty[$ .

Donc  $[0, 2]$  et  $]2, +\infty[$  sont des intervalles stables par  $f$ .

- (b)  $f(x) = x \Rightarrow x+2 = x^2 \Rightarrow x = 2$  ou  $-1$ . Réciproquement, seule  $2$  est solution.

De plus  $f(x) - x > 0$  si  $x < 2$  et  $f(x) - x < 0$  si  $x > 2$ .

- (c) On définit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par 
$$\begin{cases} u_0 \in [0, 2] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- D'après 1,  $u_n \in [0, 2]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- D'après 2, comme  $f$  est croissante,  $(u_n)$  est monotone.
- $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 > 0$  donc  $(u_n)$  est croissante.
- $(u_n)$  est convergente et sa limite est 2.

- (d) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [2, +\infty[$ ,  $(u_n)$  est décroissante et minorée donc converge et sa limite vaut 2.

5. On pose  $g : x \mapsto \cos(x)$  et  $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

- (a) La fonction  $\cos$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , réalise une bijection décroissante de  $I$  dans  $[0, 1]$ . Ainsi  $g(I) = [0, 1] \subset I$ . Donc  $I$  est un intervalle stable par  $g$  et donc par  $g \circ g$  (par 3a).

- (b)  $x \mapsto g(x) - x$  est bijective sur  $I$  (car sa dérivée est négative) et vaut 1 en 0 et -1 en  $\frac{\pi}{2}$ .

Donc  $g(x) - x = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in I$ .

Ainsi  $g([0, \alpha]) = [\alpha, 1] \subset \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$ , donc  $g(g([0, \alpha])) \subset g\left(\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, \alpha]$ .

De même  $g\left(g\left(\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]\right)\right) \subset \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Donc  $[0, \alpha]$  et  $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$  sont des intervalles stables par  $g \circ g$ .

- (c) On définit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par 
$$\begin{cases} x_0 \in [0, \alpha] \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$
 avec  $g$  décroissante. D'après la question 3,  $(v_n)$

est croissante et bornée par 0 et  $\alpha$  tandis que  $(w_n)$  est décroissante et bornée par  $\alpha$  et  $\frac{\pi}{2}$ . Toutes deux convergent donc vers la seule limite possible, solution de  $(g \circ g)(x) = x$  :  $\alpha$ .

D'après la propriété admise,  $(x_n)$  converge également vers  $\alpha$ .