

TD D1. Systèmes linéaires

Exercice D1.1

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$\begin{array}{lll}
 1. \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}, & 4. \begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}, & 6. \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}, \\
 2. \begin{cases} (2 - i)x + (3 + i)y = 1 + 2i \\ (3 + 2i)x + (1 + 5i)y = -2 + 3i \end{cases}, & & 7. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 3y + 2z = 4 \end{cases}, \\
 3. \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}, & 5. \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 2 \\ -x + y + 4z = 4 \end{cases}, & 8. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}.
 \end{array}$$

Exercice D1.2

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$\begin{array}{lll}
 1. \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - z = 1 \\ 4x + 7y + z = 1 \end{cases}, & 2. \begin{cases} x + 3y + 2z + t = -2 \\ 2x + 7y + 3z = -5 \\ 3x + 8y + 7z + 11t = 13 \\ -2x - 8y - 2z + 6t = 18 \end{cases}, & 3. \begin{cases} x + y - z - s + t = 0 \\ 2x + y - 4z + 4t = 0 \\ x + 2y - 3z + s - t = 0 \end{cases}.
 \end{array}$$

Exercice D1.3

Résoudre les systèmes suivants, en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll}
 1. \begin{cases} x + y = a \\ -x + ay = 1 \end{cases}, & 4. \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x + 3y - 2z = 2 \\ 7x - 4y - a^2z = a - 4 \end{cases}, \\
 2. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ 2x + 2y + 3z = 3 \end{cases}, & 5. \begin{cases} x + ay + 2z = a \\ -2x + y + (a - 2)z = 1 \\ ax + y + 2z = 2a - 1 \end{cases}, \\
 3. \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x + 3y - 4z = 2 \\ 2x + 3y - 5z = a \end{cases}, & 6. \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = 1 \\ x + y + z = a \end{cases}.
 \end{array}$$

Exercice D1.4

1. Résoudre, en fonction de $a \in \mathbb{C}$, le système

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ \bar{a}x + y + az = 0 \\ \bar{a}^2x + \bar{a}y + z = 0 \end{cases}.$$



2. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. En exploitant la relation $1 + j + j^2 = 0$, résoudre

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2z = b \\ x + j^2y + jz = c \end{cases}.$$

Exercice D1.5

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Lorsque a, b, c, d sont deux à deux distincts, résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}.$$

2. Que dire de ce système dans les autres cas ?

Exercice D1.6

Déterminer le rang des matrices suivantes.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$

3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercice D1.7

Déterminer en fonction des paramètres le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & 1 \\ 2 & 0 & 3-a \end{pmatrix},$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix},$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$

Exercice D1.8

Soit $n \geq 2$ un entier et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b_1 \\ x_2 + x_3 = 2b_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2b_{n-1} \\ x_1 + x_n = 2b_n \end{cases}.$$