# TD C2. Structures algébriques

## 1 Groupes

**Exercice C2.1** ✲

Soit $H_1$ et $H_2$ deux sous-groupes d'un groupe $(G, \times)$. Montrer que $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe de $G$ si et seulement si $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$.

**Exercice C2.2** ✲

Étant donné un groupe $(G, \star)$, on définit le centre de $G$ comme

$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G,\, x \star y = y \star x\}.$$

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous groupe de $(G, \star)$.
2. Déterminer le centre du groupe $(G, \star)$ défini par

$$G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall (x, y), (x', y') \in G,\, (x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y).$$

**Exercice C2.3** ✲✲

Soit $(G, \times)$ un groupe dont on note $e$ l'élément neutre.

1. On suppose que $G$ contient exactement deux éléments : $e$ et $a \neq e$.
   (a) Montrer que $a^2 = e$.
   (b) En déduire que deux groupes à 2 éléments sont nécessairement isomorphes.
2. On suppose que $G$ contient exactement 3 éléments.
   (a) Déterminer la table de la loi $\times$.
   (b) En déduire que deux groupes à 3 éléments sont nécessairement isomorphes.
3. Monter que les groupes $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$ ne sont pas isomorphes.

**Exercice C2.4** ✲

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Pour tout $g \in G$, on définit $\varphi_g : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & gxx^{-1} \end{array}$.

1. Montrer que $\varphi_g$ est un automorphisme de $G$.
2. Montrer que $f : g \mapsto \varphi_g$ est un morphisme de groupes de $(G, \star)$ dans $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi$ est le centre de $G$ (voir un exercice précédent).

**Exercice C2.5** ✲

Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{U}_6 & \longrightarrow & \mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_3 \\ z & \longmapsto & (z^3, z^2) \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

**Exercice C2.6** ✲ (Théorème de Lagrange)

Soit $(G, \times)$ un groupe fini à $n$ éléments et $H$ un sous-groupe à $m$ éléments de $G$. Le théorème de Lagrange stipule que nécessairement $m$ divise $n$.
On définit sur $G$ la relation binaire $\sim$ par

$$\forall x, y \in G,\, x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $G$.
2. Soit $g \in G$. On note $\mathrm{cl}(g)$ sa classe d'équivalence. Montrer que $f: \begin{array}{ccc} H & \to & \mathrm{cl}(g) \\ h & \mapsto & hg \end{array}$ est bien définie et bijective.
3. En déduire le théorème de Lagrange.

**Exercice C2.7** ✿✿

Soit $(G, \star)$ un groupe fini.

1. Soit $a \in G$. Montrer que $t: \begin{array}{ccc} G & \to G & \\ g & \mapsto & a \star g \end{array}$ est un automorphisme de $G$.
2. Soit $f : (G, \star) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ un morphisme de groupes non constant. Calculer $\displaystyle\sum_{g \in G} f(g)$.
3. Que dire si $f$ est constant ?

**Exercice C2.8** ✿✿ (sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$)

Soit $G$ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.
2. Si $\alpha > 0$, montrer que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
3. Si $\alpha = 0$, montrer que $G$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**Exercice C2.9** ✿

Montrer que chacune des applications suivantes est un morphisme de groupes, puis déterminer son noyau et son image.

1. $n \mapsto (-1)^n$, définie sur $\mathbb{Z}$,
2. $z \mapsto \dfrac{z}{|z|}$, définie sur $\mathbb{C}^*$,
3. $(r, u) \mapsto ru$, définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$.

**Exercice C2.10** ✿✿

Montrer que si deux groupes $G$ et $G'$ sont isomorphes, alors $\mathrm{Aut}(G)$ et $\mathrm{Aut}(G')$ sont isomorphes.

## 2 Anneaux, corps

**Exercice C2.11** ✿✿

Soit $E$ un ensemble. On rappelle la définition de la différence symétrique de deux parties de $E$ :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe dont tout élément est son propre symétrique.
2. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif.
3. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ n'est pas intègre si $E$ contient au moins deux éléments.

**Exercice C2.12** ✿ (Anneau des entiers de Gauß)

Soit $A = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $A$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que tout élément inversible de $A$ est de module 1.
3. En déduire le groupe des inversibles de $A$.

**Exercice C2.13** ⚙

Soit $A$ un anneau intègre. Étant donnés $a, b \in A$, on dit que $a$ **divise** $b$ (et on note $a|b$) lorsque $\exists k \in A$, $b = ak$.
Soit $a, b \in A$. Montrer que

$$a|b \text{ et } b|a \quad \Leftrightarrow \quad \exists u \in U(A),\, b = au.$$

**Exercice C2.14** ⚙

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $a, b \in A$.

1. Montrer que si $ab$ est nilpotent, alors $ba$ est nilpotent.
2. On suppose que $a$ et $b$ commutent.
   (a) Montrer que si $a$ est nilpotent, alors $ab$ est nilpotent.
   (b) Montrer que si $a$ et $b$ sont nilpotents, alors $a + b$ est nilpotent.

**Exercice C2.15** ⚙

On définit $K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que $K$ est un corps.