Devoir maison n° 10

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Soit $(I_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $I_n \geqslant 0$. Montrer que la suite (I_n) est convergente.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$
4. Montrer que le produit $(n+1)I_nI_{n+1}$ est constant.
5. (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ *(on pourra commencer par encadrer I_{n+1}^2 pour tout n).*
   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n$ *(on pourra penser à comparer trois termes successifs de la suite).*
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer I_{2n} et I_{2n+1} sous forme de produits puis à l'aide de factorielles.

Problème 2

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

Étude de l'intégrale

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer g' et en déduire les variations de g.
3. Déterminer le signe de g.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{g'(x)}{x-1}$ puis de $\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$ lorsque $x \to 1$.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = g(1/x)$.

Précisions graphiques

Soit h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x}$.

6. Montrer que h est prolongeable par continuité en 0. On appellera encore h son prolongement.
7. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \operatorname{Arctan}(x)\ln(x) - \displaystyle\int_1^x h(t)\,\mathrm{d}t$.
8. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On appelle encore g son prolongement. Étudier la dérivabilité de g (à droite) en 0.
9. Interpréter graphiquement (en 0 et en $+\infty$) les résultats précédents.

Valeur de $g(0)$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f_k : x \mapsto \displaystyle\int_1^x t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

10. Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer $f_k(x)$.
11. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$
12. En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_{2k}(x) \right| \leqslant f_{2n+2}(x).$$
13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left| g(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leqslant \frac{1}{(2n+3)^2}$.
14. Donner une valeur approchée de $g(0)$ à 10^{-2} près.
15. Tracer une allure de $\mathcal{C}_g$ en prenant en compte toutes les informations obtenues lors de ce problème et en les faisant apparaître sur votre dessin dans la mesure du possible.