**Problème 1**

**Définition 1**

*On dit que deux ensembles $E$ et $F$ sont* ***équipotents*** *lorsqu'il existe une bijection $f : E \to F$.*

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème suivant et de l'appliquer pour montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents. La dernière partie montre que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents (on aura eu besoin de ce résultat dans la partie précédente.

**Théorème 2 (*Cantor-Bernstein, 1896*)**

*Soit $E$, $F$ des ensembles. S'il existe une injection de $E$ dans $F$ et une injection de $F$ dans $E$, alors il existe une bijection de $E$ dans $F$.*

1. Par définition de $\Phi$, on a $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\Phi(X) \subset E$. En particulier, pour $X = E$, $\Phi(E) \subset E$, donc $E \in \mathscr{A}$. Donc
$$\boxed{\mathscr{A} \neq \emptyset}.$$

2. Soit $A \in \mathscr{A}$. Par définition de $\mathscr{A}$, on a $\Phi(A) \subset A$. Comme $\Phi$ est croissante ($A$ et $\Phi(A)$ sont bien des parties de $E$), on en déduit $\Phi(\Phi(A)) \subset \Phi(A)$, ce qui signifie que $\Phi(A) \in \mathscr{A}$.
$$\boxed{\forall A \in \mathscr{A},\ \Phi(A) \in \mathscr{A}}$$

3. (a) Soit $A \in \mathscr{A}$. Par définition de $X$, on a $X \subset A$. Comme $\Phi$ est croissante, $\Phi(X) \subset \Phi(A)$. De plus, comme $A \in \mathscr{A}$, $\Phi(A) \subset A$. Donc $\Phi(X) \subset A$. On a ainsi montré
$$\forall A \in \mathscr{A},\ \Phi(X) \subset A.$$
Par conséquent,
$$\Phi(X) \subset \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A = X.$$
Donc
$$\boxed{X \in \mathscr{A}}.$$

   (b) Montrons que $\Phi(X) = X$ par double inclusion. On a déjà prouvé $\Phi(X) \subset X$ à la question précédente. De plus, d'après la question 2 et comme $X \in \mathscr{A}$, $\Phi(X) \in \mathscr{A}$. Or par définition de $X$, $\forall A \in \mathscr{A}$, $X \subset A$. Donc en particulier $X \subset \Phi(X)$. Donc
$$\boxed{\text{On a } \Phi(X) = X, \text{ donc } \Phi \text{ admet un point fixe.}}$$

4. (a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Par définition d'une image directe, $f(A) \subset F$, et donc $(F \setminus f(A)) \subset F$. On en déduit $g(F \setminus f(A)) \subset E$, puis $(E \setminus g(F \setminus f(A))) \subset E$, soit $\Phi(A) \in \mathcal{P}(E)$.
$$\boxed{\Phi \text{ est bien définie.}}$$

(b) Montrons que $\Phi$ est une application croissante. Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \subset B$. En utilisant les propriétés de l'image directe et du complémentaire, on a alors successivement

$$\begin{aligned} f(A) &\subset f(B) \\ F \setminus f(B) &\subset F \setminus f(A) \\ g(F \setminus f(B)) &\subset g(F \setminus f(A)) \\ E \setminus g(F \setminus f(A)) &\subset E \setminus g(F \setminus f(B)) \\ \Phi(A) &\subset \Phi(B) \end{aligned}$$

Ainsi $\Phi$ est croissante. D'après le résultat de la partie A, on en déduit que $\Phi$ admet un point fixe.

$$\boxed{\Phi \text{ admet un point fixe } X.}$$

5. (a) On a tout d'abord $\Phi(X) = X$, donc $E \setminus g(F \setminus f(X)) = X$. Ainsi $g(F \setminus f(X)) = E \setminus X$.
Soit $x \in F \setminus f(X)$. On a alors $g(x) \in g(F \setminus f(X)) = E \setminus X$. Donc

$$\boxed{\tilde{g} \text{ est bien définie.}}$$

(b) $\tilde{g}$ est une restriction à la source et au but de $g$, donc $\tilde{g}$ est injective. On peut aussi le montrer comme suit. Soit $x, x' \in F \setminus f(X)$ tels que $\tilde{g}(x) = \tilde{g}(x')$. On a par définition $g(x) = g(x')$. Donc $x = x'$ car $g$ est injective.
Montrons que $\tilde{g}$ est surjective. Soit $y \in E \setminus X$. On a vu précédemment que $E \setminus X = g(F \setminus f(X))$. Il existe donc $x \in F \setminus f(X)$ tel que $g(x) = y$, ce qui signifie que $\tilde{g}(x) = y$. Donc $\tilde{g}$ est surjective.

$$\boxed{\tilde{g} \text{ est bijective.}}$$

6. (a) Soit $x \in E$.
- Si $x \in X$, alors $h(x) = f(x) \in F$.
- Si $x \notin X$, alors $x \in E \setminus X$. Donc $h(x) = \tilde{g}^{-1}(x)$ est bien défini et $\tilde{g}^{-1}(x) \in F \setminus f(X) \subset F$.

Dans tous les cas, $h(x) \in F$.

$$\boxed{h \text{ est bien définie.}}$$

(b) Montrons que $h$ est injective et surjective.

**Inj.** Soit $x, x' \in E$ tels que $h(x) = h(x')$. On distingue deux cas :
- Si $x \in X$, alors $h(x) = f(x) \in f(X)$. Supposons $x' \notin X$. On aurait $h(x') = \tilde{g}^{-1}(x') \in F \setminus f(X)$. Comme $h(x) = h(x')$, on en déduirait une contradiction. Donc $x' \in X$. Ainsi $h(x') = f(x') = h(x) = f(x)$. Comme $f$ est injective, $x = x'$.
- Si $x \notin X$, le même raisonnement montre que $x' = x$.

Donc $h$ est injective.

**Surj.** Soit $y \in F$. On distingue deux cas :
- Si $y \in f(X)$, alors il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in X$, $y = h(x)$.
- Si $y \in F \setminus f(X)$, on pose $x = \tilde{g}(y)$. On a alors $\tilde{g}^{-1}(x) = y$ et $x \in E \setminus X$, donc $y = h(x)$.

Donc $h$ est surjective.

$$\boxed{h \text{ est bijective, ce qui prouve le théorème de Cantor-Bernstein.}}$$

7. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. On définit $\varphi_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad \varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

On a alors par définition de $\varphi(A)$

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad x \in A \Leftrightarrow \varphi_A(x) = 1.$$

On considère ensuite l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \\ & A & \longmapsto & \varphi_A \end{array}$$

et on montre que $f$ est injective.
Soit $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telles que $f(A) = f(B)$. Montrons que $A = B$. Soit $x \in \mathbb{N}$. On a

$$x \in A \Leftrightarrow \varphi_A(x) = 1 \Leftrightarrow \varphi_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B.$$

Donc $A = B$.

$$\boxed{f \text{ est injective.}}$$

8. Soit $u \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$. Donc $(n, u_n) \in \mathbb{N}^2$ et $\{(n, u_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$.

$$\boxed{\Psi \text{ est bien définie.}}$$

Montrons que $\Psi$ est injective. Soit $u, v \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telles que $\Psi(u) = \Psi(v)$. Montrons que $u = v$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $(n, u_n) \in \Psi(u) = \Psi(v)$. Donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $(n, u_n) = (m, v_m)$. On en déduit $n = m$ et $u_n = v_m = v_n$. Ainsi $u = v$.

$$\boxed{\Psi \text{ est injective.}}$$

9. On sait que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents. Il existe donc $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ bijective. On pose

$$\begin{array}{rccc} T : & \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \\ & A & \longmapsto & t(A) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} T' : & \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ & B & \longmapsto & t^{-1}(B) \end{array}.$$

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$. On a

$$\left(T' \circ T\right)(A) = t^{-1}(t(A)) = A, \qquad \left(T \circ T'\right)(B) = t(t^{-1}(B)) = B.$$

Donc $T$ est bijective.

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ et } \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \text{ sont équipotents.}}$$

10. D'après la question 7, il existe une application injective de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
D'après la question 8, $\psi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ est injective. Or d'après la question 9, $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents et $T : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ est bijective, de bijection réciproque $T'$. On en déduit que $T' \circ \Psi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est injective.
On peut donc appliquer le théorème de Cantor-Bernstein et conclure

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ et } \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ sont équipotents.}}$$

11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, une suite strictement croissante. On montre $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant u_n$, par récurrence sur $n$.

 **Init.** On a $u_0 \in \mathbb{N}$, donc $0 \leqslant u_0$.

 **Hér.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $n \leqslant u_n$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, on a $u_n < u_{n+1}$, d'où $n < u_{n+1}$. Comme $n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{N}$, on en déduit $n+1 \leqslant u_{n+1}$.

 Donc, d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant u_n}.$$

12. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. On montre séparément l'existence et l'unicité de $c$.

 **Existence** . Considérons l'ensemble $A = \left\{ s \in \mathbb{N} \mid \binom{s+1}{2} \leqslant p \right\}$. Montrons que $A$ possède un plus grand élément. Comme $\binom{1}{0} = 0 \leqslant p$, $0 \in A$. Donc $A$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. De plus, $\forall s \in \mathbb{N}$, $\binom{s+1}{2} = \dfrac{s(s+1)}{2}$. Ainsi, $\forall s \in \mathbb{N}$, $\binom{s+2}{2} - \binom{s+1}{2} = s+1 > 0$, donc la suite $\left(\binom{s+1}{2}\right)_{s\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels strictement croissante. Par conséquent, d'après la question 1, $\forall s \in \mathbb{N}$, $s \leqslant \binom{s+1}{2}$. Ainsi, si $s \in A$, $s \leqslant \binom{s+1}{2} \leqslant p$, donc $A$ est majoré par $p$. $A$ admet donc un plus grand élément $c$. Comme $c \in A$ et $c+1 \notin A$, on obtient

$$\binom{c+1}{2} \leqslant p < \binom{c+2}{2}.$$

 **Unicité.** Soit $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ vérifiant le résultat. Supposons $c_1 \neq c_2$. Quitte à échanger $c_1$ et $c_2$, on peut supposer $c_1 < c_2$. On a donc $c_1 + 1 \leqslant c_2$. Comme la suite $\left(\binom{s+1}{2}\right)_{s\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a $p < \binom{c_1+2}{2} \leqslant \binom{c_2+1}{2} \leqslant p$, ce qui est absurde. Donc nécessairement $c_1 = c_2$.

 Donc

$$\boxed{\exists! c \in \mathbb{N} \binom{c+1}{2} \leqslant p < \binom{c+2}{2}}.$$

 (b) On a par définition $a, b \in \mathbb{Z}$.

 — Comme $\binom{c+1}{2} \leqslant p$, on a bien $a = p - \binom{c+1}{2} \in \mathbb{N}$.

 — Comme $\binom{c+2}{2} = \binom{c+1}{2} + c + 1$, on a $b = c - a = c + \binom{c+1}{2} - p = \binom{c+2}{2} - 1 - p$. Comme $p < \binom{c+2}{2}$, $p + 1 \leqslant \binom{c+2}{2}$, et donc $b \in \mathbb{N}$.

 — Enfin $f(a,b) = a + \binom{a+b+1}{2} = p - \binom{c+1}{2} + \binom{c+1}{2} = p$.

$$\boxed{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid f(a,b) = p}.$$

13. On a montré à la question 2.2 que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists (a,b) \in \mathbb{N}^2 f(a,b) = p$, donc $f$ est surjective.
Montrons que $f$ est injective. Soit $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$. Posons $p = f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$. D'après la question 2.1, il existe un unique $c \in \mathbb{N}$ tel que $\binom{c+1}{2} \leqslant p < \binom{c+2}{2}$.
Or on a $p = a_1 + \binom{a_1 + b_1 + 1}{2}$. Comme $a_1 \in \mathbb{N}$ et $b_1 \in \mathbb{N}$, on en déduit

$$\binom{a_1 + b_1 + 1}{2} \leqslant p < a_1 + b_1 + 1 + \binom{a_1 + b_1 + 1}{2} = \binom{a_1 + b_1 + 2}{2}.$$

Par unicité de $c$, on en déduit $a_1 + b_1 = c$. De même on prouve que $a_2 + b_2 = c$. On en déduit

$$a_1 = p - \binom{a_1 + b_1 + 1}{2} = p - \binom{c+1}{2} = p - \binom{a_2 + b_2 + 1}{2} = a_2,$$

puis $b_1 = c - a_1 = c - a_2 = b_2$. Donc $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ et $f$ est injective.

$$\boxed{f \text{ est bijective}}.$$