
Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

On définit la suite (f_n) par $\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases}$. On ne cherchera pas à déterminer son expression générale.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geqslant 1$.
2. (a) Montrer que la suite (f_n) est croissante.
   (b) En déduire que (f_n) diverge vers $+\infty$
3. Pour tout $n > 0$, on pose $t_n = f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1}$.
   (a) Montrer que pour tout $n > 0$, $t_{n+1} = -t_n$.
   (b) En déduire que pour tout $n > 0$, $t_n = (-1)^n$.
4. On définit la suite (u_n) par : $\forall n > 0$, $u_n = \dfrac{f_n}{f_{n-1}}$. On définit (x_n) et (y_n) deux suites extraites de (u_n) par : $\forall n > 0,\ x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$.
   (a) Montrer que pour tout $n > 0$, $u_{n+2} - u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{f_{n+1}f_{n-1}}$.
   (b) Démontrer que (x_n) est décroissante, que (y_n) est croissante, et que $y_n - x_n \to 0$.
   (c) En déduire que (x_n) et (y_n) puis (u_n) convergent vers la même limite ℓ.
   (d) Montrer pour tout $n > 0$ que $\dfrac{f_{2n+1}}{f_{2n}} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{f_{2n}}{f_{2n-1}}$ puis que $0 \leqslant \ell - \dfrac{f_{2n+1}}{f_{2n}} \leqslant \dfrac{1}{f_{2n-1}f_{2n}}$.
5. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $H_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} f_k^2$.
   (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $H_p = f_p f_{p+1}$.
   (b) Pour tout $n > 0$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{H_p}$. Montrer alors que $S_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - 1$.
   (c) En déduire que (S_n) converge et donner sa limite.

Problème 2

Soit (u_n) une suite définie par u_0 et u_1 réels positifs et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Dans cette question, on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant 1$.
   (a) Montrer que (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
   (b) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer une relation vérifiée par sa limite.
   (c) Conclure.

3. (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_N > 1$.
   (b) Montrer alors que $u_{N+1} > 1$ puis que $u_{N+2} > \sqrt{2}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \geqslant N+2$, $u_n > \sqrt{2}$.
4. Pour simplifier, quitte à n'étudier la suite (u_n) qu'à partir d'un certain rang, on considérera dans toute la suite que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{2}$. Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = |u_n - 2|$.
   (a) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} \leqslant \frac{v_{n+1} + v_n}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2}.$$
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} \leqslant \dfrac{v_{n+1} + v_n}{3}$ (on pourra utiliser sans démonstration que $\sqrt{2\sqrt{2}} > 1$.
5. Soit (x_n) la suite définie par $\begin{cases} x_0 = v_0,\ x_1 = v_1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1} + x_n}{3} \end{cases}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n peut s'exprimer sous la forme $x_n = aq^n + br^n$, avec q et r à déterminer (et a et b que l'on ne cherchera pas à exprimer).
   (b) En déduire la limite de (x_n).
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant x_n$.
   (d) En déduire le comportement de la suite (u_n).

Problème 3

Pour tout ensemble E, on rappelle que $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E.

Définition 1

Soit E un ensemble. On dit qu'un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de E est un **filtre** *sur E lorsque*

F_1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

F_2) *$\mathcal{F}$ est stable par intersection,* i.e. $\forall X, Y \in \mathcal{F}$, $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

F_3) $\forall X \in \mathcal{F}, \forall Y \in \mathcal{P}(E)$, $(X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F})$.

F_4) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

On notera Φ_E l'ensemble des filtres sur E.

I Un exemple

Dans cette partie seulement, on considère $E = \{a, b, c\}$ un ensemble à trois éléments.

1. Expliciter $\mathcal{P}(E)$.
2. Les parties suivantes de $\mathcal{P}(E)$ sont-elles un filtre ?
   (a) $\mathcal{F}_1 = \emptyset$.
   (b) $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(E)$.
   (c) $\mathcal{F}_3 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$.
   (d) $\mathcal{F}_4 = \{\{a\}, \{a, c\}\}$.
   (e) $\mathcal{F}_5 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.
3. Énumérer, en expliquant votre raisonnement, les parties de $\mathcal{P}(E)$ qui sont des filtres.

II Généralités

Soit maintenant E un ensemble quelconque.

4. Montrer que si E est non vide, alors $\mathcal{A} = \{E\}$ est un filtre sur E.
5. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E.
   (a) Montrer que $E \in \mathcal{F}$.
   (b) Déterminer quelles assertions sont vraies parmi les suivantes (justifications attendues.)
      i) $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(E)$.
      ii) $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$.
      iii) $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
      iv) $\mathcal{F} \subset \Phi_E$.
      v) $E \neq \emptyset \Leftrightarrow \{E\} \in \Phi_E$.
      vi) $\Phi_E \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
      vii) $\Phi_E \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
      viii) $\Phi_E \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$.
6. À quelle condition nécessaire et suffisante $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ?
7. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtres sur E. Montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un filtre sur E.

III Filtres principaux

Soit E un ensemble. Pour toute partie non vide A de E, on pose

$$\mathcal{H}_A = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset X\}.$$

8. Dans l'exemple de la partie I, déterminer $\mathcal{H}_{\{a\}}$, $\mathcal{H}_{\{a,b\}}$ et $\mathcal{H}_{\{a,b,c\}}$
9. Soit A une partie non vide de E. Montrer que $\mathcal{H}_A$ est un filtre sur E.
   $\mathcal{H}_A$ *est appelé le* ***filtre principal engendré par*** A.
10. Soient A une partie non vide de E et $\mathcal{F}$ un filtre sur E. Montrer que $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{H}_A \subset \mathcal{F}$.
11. Soient A et B deux parties non vides de E.
   (a) Montrer que $A \subset B \Rightarrow \mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_A$.
   (b) Montrer que $\mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{A \cup B}$.
12. Soient A et B deux parties non disjointes de E.
   (a) Montrer que $\mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_{A \cap B}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{A \cap B} \Leftrightarrow A \subset B$ ou $B \subset A$.
13. On note $\mathcal{P}(E)^*$ l'ensemble des parties non vides de E et on pose $\mathcal{H} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E)^* & \longrightarrow & \Phi_E \\ A & \longmapsto & \mathcal{H}_A \end{array}$.

    Montrer que $\mathcal{H}$ est injective.

IV Un exemple de filtre non principal

Dans cette partie, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geqslant n\}$. On définit de plus

$$\mathcal{I} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant n,\ k \in X\}.$$

14. Montrer que $\mathcal{I}$ est un filtre sur $\mathbb{N}$.
15. Montrer que
$$\mathcal{I} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}(I_n).$$
16. (a) Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{I}$ n'est pas inclus dans $\mathcal{H}_A$.
    (b) En déduire que l'application $\mathcal{H}$ de la question 13 n'est pas surjective lorsque $E = \mathbb{N}$.

V Ultrafiltres

On considère la définition suivante.

Définition 2

*Soit E un ensemble. On dit qu'un filtre $\mathcal{U}$ sur E est un **ultrafiltre** lorsque*

$$\forall \mathcal{F} \in \Phi_E,\ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{F}).$$

Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, $\bar{A}$ désignera le complémentaire de A dans E.

17. (a) Soit $a \in E$. On pose $A = \{a\}$. Montrer que $\mathcal{H}_A$ est un ultrafiltre sur E.
    (b) Soit A une partie de E contenant au moins deux éléments. Montrer que $\mathcal{H}_A$ n'est pas un ultrafiltre.

Définition 3

*Deux filtres $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sur E sont dits **compatibles** lorsque*

$$\forall X_1 \in \mathcal{F}_1, \forall X_2 \in \mathcal{F}_2,\ X_1 \cap X_2 \neq \emptyset.$$

On pose alors

$$\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 = \{X_1 \cap X_2 \mid X_1 \in \mathcal{F}_1,\ X_2 \in \mathcal{F}_2\}.$$

18. Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux filtres sur E compatibles.
    (a) Montrer que $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ est un filtre sur E.
    (b) Soit $\mathcal{G} \in \Phi_E$. Montrer que

$$(\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{G} \text{ et } \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}) \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}.$$

19. Soient $\mathcal{F}$ un filtre sur E et A une partie non vide de E. Montrer que si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}_A$ ne sont pas compatibles, alors $\bar{A} \in \mathcal{F}$.
20. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. Montrer que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \big(A \in \mathcal{F} \text{ ou } \bar{A} \in \mathcal{F}\big).$$

21. En déduire que $\mathcal{I}$ n'est pas un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$.