Problème 1

On définit la suite (f_n) par $\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases}$.

1. Procédons par récurrence double.

   Init. $f_0 = 1 \geqslant 1$ et $f_1 = 1 \geqslant 1$.

   Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $f_n \geqslant 1$ et $f_{n+1} \geqslant 1$.
   Alors $f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \geqslant 2 \geqslant 1$. La propriété est donc héréditaire.

2. (a) $\forall n \geqslant 1$, $f_{n+1} - f_n = f_{n-1} \geqslant 1$ d'après ce qui précède, donc $f_{n+1} - f_n \geqslant 0$.
   La suite est donc croissante à partir du rang 1. De plus $f_0 \leqslant f_1$. Donc $\boxed{\text{La suite } (f_n) \text{ est croissante}}$.

   (b) Par conséquent, soit elle est majorée et converge donc, soit elle diverge vers $+\infty$.
   Supposons-la majorée, alors elle converge ; soit ℓ sa limite.
   Alors on a aussi $f_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $f_{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. La relation $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ donne, par unicité de la limite, $\ell = 2\ell$. Donc $\ell = 0$, ce qui est impossible car $f_n \geqslant 1$ pour tout n. On a donc montré que $\boxed{(f_n) \text{ diverge vers } +\infty}$.

3. Pour tout $n > 0$, on pose $t_n = f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1}$.

   (a) Pour tout $n > 0$, $t_{n+1} = f_{n+1}^2 - f_{n+2}f_n = f_{n+1}^2 - (f_n + f_{n+1})f_n = f_{n+1}^2 - f_n^2 - f_{n+1}f_n$.
   D'où $t_{n+1} = -f_n^2 - f_{n+1}(f_n - f_{n+1}) = -f_n^2 + f_{n+1}f_{n-1} = \boxed{-t_n}$.

   (b) On en déduit que (t_n) est géométrique de raison (-1). Donc $\forall n > 0$, $t_n = t_1 \times (-1)^{n-1}$.
   Or $t_1 = -1$. Finalement, $\boxed{\forall n > 0,\ t_n = (-1)^n}$.

4. On définit (u_n) par : $\forall n > 0$, $u_n = \dfrac{f_n}{f_{n-1}}$ et (x_n) et (y_n) par : $\forall n > 0$, $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$.

   (a) Pour tout $n > 0$, $u_{n+2} - u_n = \dfrac{f_{n+2}}{f_{n+1}} - \dfrac{f_n}{f_{n-1}} = \dfrac{f_{n+2}f_{n-1} - f_nf_{n+1}}{f_{n+1}f_{n-1}}$.
   Or $f_{n+2}f_{n-1} - f_nf_{n+1} = (f_{n+1} + f_n)f_{n-1} - f_n(f_n + f_{n-1}) = f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = -t_n = (-1)^{n+1}$.
   Donc $\boxed{\forall n > 0,\ u_{n+2} - u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{f_{n+1}f_{n-1}}}$.

   (b)
   - $\forall n > 0$, $x_{n+1} - x_n = u_{2n+2} - u_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{f_{2n+1}f_{2n-1}} < 0$.
     Donc (x_n) est décroissante.
   - $\forall n > 0$, $y_{n+1} - y_n = u_{2n+3} - u_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{2n+2}}{f_{2n+2}f_{2n}} > 0$.
     Donc (y_n) est décroissante.
   - $\forall n > 0$, $y_n - x_n = u_{2n+1} - u_{2n} = \dfrac{f_{2n+1}}{f_{2n}} - \dfrac{f_{2n}}{f_{2n-1}} = \dfrac{f_{2n+1}f_{2n-1} - f_{2n}^2}{f_{2n}f_{2n-1}}$.
     Or $f_{2n+1}f_{2n-1} - f_{2n}^2 = -t_{2n} = (-1)^{2n+1}$. Donc $y_n - x_n = \dfrac{-1}{f_{2n}f_{2n-1}}$. Comme $f_{2n}f_{2n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $y_n - x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   On a donc montré que $\boxed{(x_n) \text{ et } (y_n) \text{ sont adjacentes}}$.

(c) Ceci implique que (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite. Comme elles constituent deux suites extraites de (u_n) qui en recouvrent tous les termes (à partir du rang 1), ça montre que $\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$.

(d) On appelle ℓ la limite de (u_n) qui est donc aussi celle de (x_n) et (y_n). Comme (x_n) est décroissante et (y_n) croissante, on a $\ell = \inf\{x_n,\ n > 0\} = \sup\{y_n, n > 0\}$. Donc pour tout $n > 0$, $y_n \leqslant \ell \leqslant x_n$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n > 0,\ \dfrac{f_{2n+1}}{f_{2n}} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{f_{2n}}{f_{2n-1}}}$.

En retranchant y_n, on obtient $0 \leqslant \ell - \dfrac{f_{2n+1}}{f_{2n}} \leqslant x_n - y_n$. Or on a montré précédemment que $x_n - y_n = \dfrac{1}{f_{2n}f_{2n-1}}$. Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n > 0,\ 0 \leqslant \ell - \dfrac{f_{2n+1}}{f_{2n}} \leqslant \dfrac{1}{f_{2n-1}f_{2n}}}$.

5. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $H_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} f_k^2$.

(a) Procédons par récurrence.

$\boxed{\text{Init.}}$ $H_0 = f_0^2 = 1$ et $f_0 f_1 = 1$.

$\boxed{\text{Hér.}}$ Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $H_p = f_p f_{p+1}$.
Alors $H_{p+1} = H_p + f_{p+1}^2 = f_p f_{p+1} + f_{p+1}^2 = f_{p+1}(f_p + f_{p+1}) = f_{p+1}f_{p+2}$. La propriété est donc héréditaire.

On a donc montré que $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N},\ H_p = f_p f_{p+1}}$.

(b) Pour tout $n > 0$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{H_p}$.

$S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{H_p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{f_p^2 - f_{p+1}f_{p-1}}{f_p f_{p+1}} = \sum_{p=1}^{n} \frac{f_p}{f_{p+1}} - \frac{f_{p-1}}{f_p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{u_{p+1}} - \frac{1}{u_p}$. On conclut à l'aide d'une somme télescopique que : $\boxed{S_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - 1}$.

(c) Comme $\ell \neq 0$, $\boxed{(S_n) \text{ converge vers } \dfrac{1}{\ell} - 1}$.

Problème 2

Soit (u_n) une suite définie par u_0 et u_1 réels positifs et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + u_n}$.

1. On procède par récurrence double.

Init. u_0 et u_1 sont bien définis et strictement positifs par hypothèse.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que u_n et u_{n+1} sont bien définis et positifs.
Alors $u_{n+1} + u_n > 0$, donc $\sqrt{u_{n+1} + u_n}$ est bien défini et strictement positif.

2. Dans cette question, on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant 1$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} + u_n} - u_{n+1} = \dfrac{(\sqrt{u_{n+1} + u_n} - u_{n+1})(\sqrt{u_{n+1} + u_n} + u_{n+1})}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + u_{n+1}}$ (quantité conjuguée).

D'où $u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + u_n - u_{n+1}^2}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + u_{n+1}}$.

Or $u_{n+1} + u_n - u_{n+1}^2 = u_{n+1}(1 - u_{n+1}) + u_n \geqslant 0$ sous l'hypothèse que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant 1$.

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante à partir du rang 1}}$.

(b) De plus (u_n) est majorée par 1, donc (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite. Par continuité de la fonction racine carrée, elle vérifie $\boxed{\ell = \sqrt{2\ell}}$.

(c) $\ell = \sqrt{2\ell} \Leftrightarrow \sqrt{\ell}(\sqrt{\ell} - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 2$.
Or (u_n) est bornée par 0 et 1 et strictement croissante, donc sa limite est dans $]0,1]$, ce qui est impossible.

3. (a) La question 2 montre que l'hypothèse « $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant 1$ » est fausse.
Donc $\boxed{\text{il existe } N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } u_N > 1}$.

(b) On a alors : $u_{N+1} = \sqrt{u_N + u_{N-1}}$. Or $u_{N-1} > 0$ donc $u_{N+1} > \sqrt{u_N}\ \boxed{> 1}$.
Puis $u_{N+2} = \sqrt{u_N + u_{N+1}}\ \boxed{> \sqrt{2}}$.

(c) On procède par récurrence double.
Comme précédemment, $u_{N+3} = \sqrt{u_{N+2} + u_{N+1}} > \sqrt{\sqrt{2}+1}\ \boxed{> \sqrt{2}}$ car $\sqrt{2} > 1$, ce qui achève l'initialisation (pour $N+2$, c'est la question précédente).
Soit $n \geqslant N+2$. Supposons que $u_n > \sqrt{2}$ et $u_{n+1} > \sqrt{2}$.
Alors $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + u_n} > \sqrt{2\sqrt{2}} > \sqrt{2}$ car $\sqrt{2} > 1$.

4. Pour simplifier, quitte à n'étudier la suite (u_n) qu'à partir d'un certain rang, on considérera dans toute la suite que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{2}$. Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = |u_n - 2|$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+2} = |u_{n+2} - 2| = |\sqrt{u_{n+1} + u_n} - 2|$. On multiplie par la quantité conjuguée : $v_{n+2} = \left|\dfrac{u_{n+1} + u_n - 4}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2}\right| = \dfrac{|u_{n+1} - 2 + u_n - 2|}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2} \leqslant \dfrac{|u_{n+1} - 2| + |u_n - 2|}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2}$ par inégalité triangulaire. Finalement $\boxed{v_{n+2} \leqslant \dfrac{v_{n+1} + v_n}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2}}$.

(b) Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{2}$, $\sqrt{u_{n+1} + u_n} > \sqrt{2\sqrt{2}} > 1$ donc $\dfrac{v_{n+1} + v_n}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2} \leqslant \dfrac{v_{n+1} + v_n}{1+2}$.
Finalement, $\boxed{v_{n+2} \leqslant \dfrac{v_{n+1} + v_n}{3}}$.

5. Soit (x_n) la suite définie par $\begin{cases} x_0 = v_0,\ x_1 = v_1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1} + x_n}{3} \end{cases}$.

(a) (x_n) vérifie une relation de récurrence à deux termes, dont l'équation caractéristique est $x^2 - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3} = 0$. Elle a deux racines : $q = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $r = \dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$ Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = aq^n + br^n$, avec a et b deux réels.

(b) Comme $\sqrt{13} < \sqrt{16} = 4$, on a $|q| < 1$ et $|r| < 1$. Ainsi, $q^n \to 0$ et $r^n \to 0$ et par conséquent $\boxed{(x_n) \text{ tend vers } 0}$.

(c) On montre par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant x_n$.
L'initialisation vient de la définition de (x_n) avec $x_0 = v_0$ et $x_1 = v_1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n \leqslant x_n$ et $v_{n+1} \leqslant x_{n+1}$.
Alors $v_{n+2} \leqslant \dfrac{v_{n+1} + v_n}{3} \leqslant \dfrac{x_{n+1} + x_n}{3} = x_{n+2}$.

(d) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant v_n \leqslant x_n$. D'après le théorème des gendarmes, (v_n) tend vers 0 et donc $\boxed{u_n \to 2}$.

Problème 3

I Un exemple

Dans cette partie seulement, on considère $E = \{a, b, c\}$ un ensemble à trois éléments.

1. On a

$$\boxed{\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}}.$$

2. (a) $\mathcal{F}_1 = \emptyset$ n'est pas un filtre car la condition (F_1) n'est pas satisfaite.
   (b) $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(E)$ n'est pas un filtre car $\emptyset \in \mathcal{F}_2$ ce qui contredit la condition (F_4).
   (c) $\mathcal{F}_3 = \{\{a\}, \{b,c\}\}$ n'est pas un filtre car

$$\{a\} \cap \{b,c\} = \emptyset \notin \mathcal{F}_3,$$

   ce qui contredit (F_2).
   (d) $\mathcal{F}_4 = \{\{a\}, \{a,c\}\}$ n'est pas un filtre : on a $\{a\} \subset \{a,b,c\}$ mais $\{a,b,c\} \notin \mathcal{F}_4$, ce qui contredit (F_3).
   (e) $\mathcal{F}_5 = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$ est un filtre : (F_1) et (F_4) sont claires, l'intersection de deux éléments appartient encore à $\mathcal{F}_5$, et toute partie contenant un élément de $\mathcal{F}_5$ appartient aussi à $\mathcal{F}_5$. Ainsi, les quatre conditions sont vérifiées donc $\boxed{\mathcal{F}_5 \text{ est un filtre}}$.

3. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ un filtre. Puisque $\emptyset \notin \mathcal{F}$, plusieurs cas sont à distinguer.

   - Si $\{a\} \in \mathcal{F}$, alors par (F_3), $\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\} \in \mathcal{F}$. En revanche, $\{b\}, \{c\}, \{b,c\} \notin \mathcal{F}$ car leur intersection avec $\{a\}$ vaut $\emptyset$. Donc

$$\boxed{\mathcal{F} = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}}.$$

   - De même si $\{b\} \in \mathcal{F}$, on obtient

$$\boxed{\mathcal{F} = \{\{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}}.$$

   - Si $\{c\} \in \mathcal{F}$, on obtient

$$\boxed{\mathcal{F} = \{\{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}}.$$

   - Si $\{a\}, \{b\}, \{c\} \notin \mathcal{F}$ mais $\{a,b\} \in \mathcal{F}$, alors par (F_3), $\{a,b,c\} \in \mathcal{F}$ tandis que $\{a,c\}, \{b,c\} \notin \mathcal{F}$. Donc

$$\boxed{\mathcal{F} = \{\{a,b\}, \{a,b,c\}\}}.$$

   - De même si $\{a,c\} \in \mathcal{F}$,

$$\boxed{\mathcal{F} = \{\{a,c\}, \{a,b,c\}\}}.$$

   - De même si $\{b,c\} \in \mathcal{F}$,

$$\boxed{\mathcal{F} = \{\{b,c\}, \{a,b,c\}\}}.$$

   - Enfin, si aucun des ensembles précédents n'est dans $\mathcal{F}$, il reste uniquement

$$\boxed{\mathcal{F} = \{\{a,b,c\}\}}.$$

   Pour résumer, les filtres sur E sont exactement

$$\boxed{\begin{array}{c}\{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}\,,\ \{\{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}\,,\ \{\{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}\,,\\ \{\{a,b\}, \{a,b,c\}\}\,,\quad \{\{a,c\}, \{a,b,c\}\}\,,\quad \{\{b,c\}, \{a,b,c\}\}\,,\quad \{\{a,b,c\}\}\end{array}}.$$

II Généralités

Soit maintenant E un ensemble quelconque.

4. On suppose E non vide. Montrons que $\mathcal{A} = \{E\}$ est un filtre sur E.
   - Comme $E \in \mathcal{A}$, on a $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Ainsi $\mathcal{A}$ vérifie bien (F_1).
   - Soit $X, Y \in \mathcal{A}$. On a nécessairement $X = Y = E$ donc $X \cap Y = E$, ainsi $X \cap Y \in \mathcal{A}$. On vérifie ainsi (F_2).
   - Soit $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X \subset Y$. On a $X = E$, puis $E \subset Y$ et $Y \subset E$ car Y est une partie de E. Donc $Y = E$ et $Y \in \mathcal{A}$. Ainsi (F_3) est vérifiée.
   - Comme $E \neq \emptyset$, on a $\emptyset \notin \mathcal{A}$. Ainsi (F_4) est satisfaite.

$$\boxed{\mathcal{A} = \{E\} \text{ est un filtre sur } E}.$$

5. (a) D'après (F_1), $\mathcal{F} \neq \emptyset$. On peut donc choisir $A \in \mathcal{F}$. Comme $A \subset E$ et $E \in \mathcal{P}(E)$, on déduit de (F_3) que $\boxed{E \in \mathcal{F}}$.

   (b)
   - Par définition, $\mathcal{F}$ est un ensemble de parties de E, *i.e.* $\forall X \in \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{P}(E)$, donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$.
   - Comme $\mathcal{F}$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$, on a alors $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
   - D'après la question précédente, si E est non vide, alors $\{E\}$ est un filtre sur E, *i.e.*

     $$E \neq \emptyset \Rightarrow \{E\} \in \Phi_E.$$

     Réciproquement, si $\{E\}$ est un filtre, (F_4) implique $E \neq \emptyset$.
   - Puisque tout filtre appartient à $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, on a $\Phi_E \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
   - Enfin, puisque Φ_E est lui-même un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, on a $\Phi_E \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$.

$$\boxed{\text{Les assertions } ii),\ iii),\ v),\ vii) \text{ et } viii) \text{ sont vraies}}.$$

6. On pose $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$. On distingue trois cas.
   - Si $E = \emptyset$, alors $\mathcal{B} = \emptyset$. Donc $\mathcal{B}$ ne vérifie pas (F_1).
   - Si E ne possède qu'un élément, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E\}$, donc $\mathcal{B} = \{E\}$ qui est un filtre d'après la question 1.
   - Si E possède deux éléments distincts a et b, alors $\{a\} \in \mathcal{B}$ et $\{b\} \in \mathcal{B}$. Comme $a \neq b$, on a $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$ qui n'appartient pas à $\mathcal{B}$. Ainsi (F_2) n'est pas vérifiée.

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est un filtre sur } E \text{ ssi } E \text{ possède un unique élément}}.$$

7. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtres sur E.
   - Comme $E \in \mathcal{F}$ et $E \in \mathcal{G}$, on a $E \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Ainsi $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.
   - Soit $X, Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. On a $X, Y \in \mathcal{F}$ et $X, Y \in \mathcal{G}$. Comme ce sont des filtres, $X \cap Y \in \mathcal{F}$ et $X \cap Y \in \mathcal{G}$ donc $X \cap Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.
   - Soit $X \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X \subset Y$. Comme $X \in \mathcal{F}$ et $X \in \mathcal{G}$, on déduit de (F_3) que $Y \in \mathcal{F}$ et $Y \in \mathcal{G}$, donc $Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.
   - Enfin, comme $\emptyset \notin \mathcal{F}$, on a nécessairement $\emptyset \notin \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

$$\boxed{\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \text{ est un filtre sur } E}.$$

III Filtres principaux

Soit E un ensemble. Pour toute partie non vide A de E, on pose

$$\mathcal{H}_A = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset X\}.$$

8.

$$\mathcal{H}_{\{a\}} = \{\, X \subset E \mid \{a\} \subset X \,\} = \big\{\, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\} \,\big\}.$$

$$\boxed{\mathcal{H}_{\{a\}} = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}}$$

De même,

$$\mathcal{H}_{\{a,b\}} = \{\, X \subset E \mid \{a,b\} \subset X \,\} = \big\{\, \{a,b\}, \{a,b,c\} \,\big\},$$

$$\boxed{\mathcal{H}_{\{a,b\}} = \{\{a,b\}, \{a,b,c\}\}}$$

et enfin

$$\mathcal{H}_{\{a,b,c\}} = \{\, X \subset E \mid \{a,b,c\} \subset X \,\} = \big\{\, \{a,b,c\} \,\big\},$$

$$\boxed{\mathcal{H}_{\{a,b,c\}} = \{\{a,b,c\}\}}$$

9. Soit A une partie non vide de E. Montrons que $\mathcal{H}_A$ est un filtre sur E.

- Par définition de $\mathcal{H}_A$, on a $A \in \mathcal{H}_A$. En particulier $\mathcal{H}_A \neq \emptyset$.
- Soit $X, Y \in \mathcal{H}_A$. On a $A \subset X$ et $A \subset Y$, donc $A \subset X \cap Y$, *i.e.* $X \cap Y \in \mathcal{H}_A$.
- Soit $X \in \mathcal{H}_A$ et $Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X \subset Y$. Comme $A \subset X$ et $X \subset Y$, on a $A \subset Y$, *i.e.* $Y \in \mathcal{H}_A$.
- Comme $A \neq \emptyset$, on a $A \not\subset \emptyset$. Donc $\emptyset \notin \mathcal{H}_A$.

$$\boxed{\mathcal{H}_A \text{ est un filtre sur } E}.$$

10. Soit A une partie non vide de E et $\mathcal{F}$ un filtre sur E.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $A \in \mathcal{F}$. Soit $X \in \mathcal{H}_A$. Par définition $A \subset X$. D'après (F_3), $X \in \mathcal{F}$. Ainsi $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{F}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{F}$. Comme $A \in \mathcal{H}_A$ par définition, on a $A \in \mathcal{F}$.

$$\boxed{A \in \mathcal{F} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{H}_A \subset \mathcal{F}}.$$

11. (a) Supposons $A \subset B$. Alors $B \in \mathcal{H}_A$. Comme $\mathcal{H}_A$ est un filtre, on déduit de la question précédente que $\mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_A$.

$$\boxed{A \subset B \;\Rightarrow\; \mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_A}.$$

(b) Montrons l'égalité par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $X \in \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B$. On a $A \subset X$ et $B \subset X$, donc $A \cup B \subset X$, *i.e.* $X \in \mathcal{H}_{A\cup B}$. Ainsi

$$\mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_{A\cup B}.$$

$\boxed{\supset}$ On a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, donc $A \cup B \in \mathcal{H}_A$ et $A \cup B \in \mathcal{H}_B$. Par la question précédente, $\mathcal{H}_{A\cup B} \subset \mathcal{H}_A$ et $\mathcal{H}_{A\cup B} \subset \mathcal{H}_B$. Ainsi

$$\mathcal{H}_{A\cup B} \subset \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B.$$

$$\boxed{\mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{A\cup B}}\,.$$

12. (a) On a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, donc $A \in \mathcal{H}_{A\cap B}$ et $B \in \mathcal{H}_{A\cap B}$. D'après la question précédente, $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}_{A\cap B}$ et $\mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_{A\cap B}$.

$$\boxed{\mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_{A\cap B}}\,.$$

(b) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{A\cap B}$. Comme $A \cap B \in \mathcal{H}_{A\cap B}$, on a $A \cap B \in \mathcal{H}_A$ ou $A \cap B \in \mathcal{H}_B$.

- Si $A \cap B \in \mathcal{H}_A$, alors $A \subset A \cap B$, d'où $A \subset B$.
- Si $A \cap B \in \mathcal{H}_B$, alors $B \subset A \cap B$, d'où $B \subset A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $A \subset B$ ou $B \subset A$.

- Si $A \subset B$, alors $\mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_A$ d'après la question précédente, donc

$$\mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_A = \mathcal{H}_{A\cap B}\,.$$

- Si $B \subset A$, alors $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}_B$ et

$$\mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{A\cap B}\,.$$

Dans les deux cas l'égalité est vérifiée.

$$\boxed{\mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{A\cap B} \iff A \subset B \quad \text{ou} \quad B \subset A}\,.$$

13. Montrons que l'application $A \mapsto \mathcal{H}_A$ est injective. Soit A, B des parties non vides de E telles que $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B$.

- Comme $A \in \mathcal{H}_A$, on a $A \in \mathcal{H}_B$, *i.e.* $B \subset A$.
- Comme $B \in \mathcal{H}_B$, on a $B \in \mathcal{H}_A$, *i.e.* $A \subset B$.

Ainsi $A = B$.

$$\boxed{\text{L'application } A \mapsto \mathcal{H}_A \text{ est injective}}\,.$$

IV Un exemple de filtre non principal

Dans cette partie, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geqslant n\}$. On définit de plus

$$\mathcal{I} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant n,\ k \in X\}\,.$$

14. Montrons que $\mathcal{I}$ est un filtre sur $\mathbb{N}$.

- La propriété $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n,\ k \in \mathbb{N}$ est vraie car $n = 0$ convient. Ainsi $\mathbb{N} \in \mathcal{I}$, donc $\mathcal{I} \neq \emptyset$.
- Soit $X_1, X_2 \in \mathcal{I}$. Il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall k \geq n_1,\ k \in X_1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \geq n_2,\ k \in X_2.$$

Posons $N = \max\{n_1, n_2\}$. Pour $k \geq N$, on a $k \in X_1$ et $k \in X_2$. Ainsi

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geq N,\ k \in X_1 \cap X_2,$$

donc $X_1 \cap X_2 \in \mathcal{I}$.

- Soit $X \in \mathcal{I}$ et $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tels que $X \subset Y$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall k \geq n,\ k \in X$. Comme $X \subset Y$, on a $\forall k \geq n,\ k \in Y$, donc $Y \in \mathcal{I}$.
- La propriété $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n,\ k \in \emptyset$ est fausse, donc $\emptyset \notin \mathcal{I}$.

$$\boxed{\mathcal{I} \text{ est un filtre sur } \mathbb{N}}.$$

15. Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Par définition de $\mathcal{I}$, on a les équivalences

$$X \in \mathcal{I} \ \Leftrightarrow\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n,\ k \in X \ \Leftrightarrow\ \exists n \in \mathbb{N},\ I_n \subset X \ \Leftrightarrow\ \exists n \in \mathbb{N},\ X \in \mathcal{H}_{I_n} \ \Leftrightarrow\ X \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{I_n}.$$

$$\boxed{\mathcal{I} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{I_n}}.$$

16. (a) Soit $A \subset \mathbb{N}$ non vide et $a \in A$. Posons $n = a + 1$. Comme $a < n$, on a $a \notin I_n$, donc $A \not\subset I_n$. Ainsi $I_n \notin \mathcal{H}_A$, alors que $I_n \in \mathcal{I}$. On a donc trouvé un élément de $\mathcal{I}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{H}_A$.

$$\boxed{\mathcal{I} \not\subset \mathcal{H}_A}.$$

(b) D'après la question précédente,

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^*, \qquad \mathcal{I} \neq \mathcal{H}_A.$$

Ainsi $\mathcal{I}$ n'est l'image d'aucune partie non vide par $A \mapsto \mathcal{H}_A$.

$$\boxed{\text{Si } E = \mathbb{N}, \text{ l'application } A \mapsto \mathcal{H}_A \text{ n'est pas surjective}}.$$

17. (a) Soit $a \in E$ et $A = \{a\}$. Soit $\mathcal{F}$ un filtre tel que $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{F}$. Soit $X \in \mathcal{F}$. Comme $A \in \mathcal{H}_A$, on a $A \in \mathcal{F}$. Puisque $\mathcal{F}$ est un filtre, $X \cap A \in \mathcal{F}$, et comme $A = \{a\}$, on a nécessairement $X \cap A = \{a\}$. On en déduit $a \in X$, donc $A \subset X$, *i.e.* $X \in \mathcal{H}_A$. Ainsi $\mathcal{F} = \mathcal{H}_A$.

$$\boxed{\text{Si } A = \{a\},\ \mathcal{H}_A \text{ est un ultrafiltre sur } E}.$$

(b) Supposons A contenant au moins deux éléments distincts a_1, a_2. Posons $B = \{a_1\}$. Comme $B \subset A$, on a $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}_B$. De plus, $A \not\subset B$, donc $B \notin \mathcal{H}_A$ tandis que $B \in \mathcal{H}_B$. Ainsi $\mathcal{H}_A \neq \mathcal{H}_B$, donc $\mathcal{H}_A$ n'est pas maximal.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ contient au moins deux éléments, } \mathcal{H}_A \text{ n'est pas un ultrafiltre}}.$$

18. (a) Montrons que $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ est un filtre sur E.

- Comme $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des filtres, on a $E \in \mathcal{F}_1$ et $E \in \mathcal{F}_2$, donc $E \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$.
- Soit $X, X' \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$. Il existe $X_1, X_1' \in \mathcal{F}_1$ et $X_2, X_2' \in \mathcal{F}_2$ tels que

$$X = X_1 \cap X_2, \qquad X' = X_1' \cap X_2'.$$

Ainsi

$$X \cap X' = (X_1 \cap X_1') \cap (X_2 \cap X_2') \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2.$$

- Soit $X \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ et $Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X \subset Y$. Il existe $X_1 \in \mathcal{F}_1$ et $X_2 \in \mathcal{F}_2$ tels que $X = X_1 \cap X_2$. Posons $Y_1 = Y \cup X_1$ et $Y_2 = Y \cup X_2$. Alors

$$Y_1 \in \mathcal{F}_1, \quad Y_2 \in \mathcal{F}_2, \quad Y_1 \cap Y_2 = Y.$$

  Ainsi $Y \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$.
- Comme $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont compatibles, tout élément de $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ est non vide, donc $\emptyset \notin \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$.

$$\boxed{\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \text{ est un filtre sur } E}.$$

(b) Soit $\mathcal{G}$ un filtre sur E.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{G}$ et $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}$. Pour $X \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$, il existe $X_1 \in \mathcal{F}_1$ et $X_2 \in \mathcal{F}_2$ tels que $X = X_1 \cap X_2$. Comme $\mathcal{G}$ est un filtre, $X \in \mathcal{G}$, donc $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}$. Pour $X_1 \in \mathcal{F}_1$, comme $E \in \mathcal{F}_2$ on a $X_1 = X_1 \cap E \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}$. Donc $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{G}$. De même $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}$.

$$\boxed{\forall \mathcal{G} \in \Phi_E,\ \big(\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{G} \ \text{ et } \ \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}\big) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}}.$$

19. Supposons que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}_A$ ne sont pas compatibles. Il existe $X \in \mathcal{F}$ et $Y \in \mathcal{H}_A$ tels que $X \cap Y = \emptyset$. Comme $A \subset Y$, on obtient $X \cap A = \emptyset$, donc $X \subset \overline{A}$. Comme $\overline{A} \supset X$ et $\mathcal{F}$ est un filtre, $\overline{A} \in \mathcal{F}$.

$$\boxed{\text{Si } \mathcal{F} \text{ et } \mathcal{H}_A \text{ ne sont pas compatibles, alors } \overline{A} \in \mathcal{F}}.$$

20. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\mathcal{F}$ ultrafiltre. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on distingue trois cas.

- Si $A = \emptyset$, alors $\overline{A} = E \in \mathcal{F}$.
- Si $A \neq \emptyset$ et $\mathcal{F}$ n'est pas compatible avec $\mathcal{H}_A$, alors $\overline{A} \in \mathcal{F}$ d'après la question précédente.
- Si $A \neq \emptyset$ et $\mathcal{F}$ est compatible avec $\mathcal{H}_A$, posons $\mathcal{G} = \mathcal{F} \vee \mathcal{H}_A$. D'après la question 14, $\mathcal{G}$ est un filtre contenant $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{F}$ est maximal, on a $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, donc $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{F}$ et en particulier $A \in \mathcal{F}$.

Ainsi, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \in \mathcal{F}$ ou $\overline{A} \in \mathcal{F}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \in \mathcal{F}$ ou $\overline{A} \in \mathcal{F}$. Soit $\mathcal{G}$ un filtre tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Pour $A \in \mathcal{G}$, si $\overline{A} \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, alors $\emptyset = A \cap \overline{A} \in \mathcal{G}$, contradiction. Donc $A \in \mathcal{F}$. Ainsi $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, donc $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre.

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est un ultrafiltre ssi } \forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \in \mathcal{F} \text{ ou } \overline{A} \in \mathcal{F}}.$$

21. Posons A l'ensemble des entiers pairs. Alors $\overline{A}$ est l'ensemble des entiers impairs. Par définition de $\mathcal{I}$, ni A ni $\overline{A}$ n'appartient à $\mathcal{I}$. D'après la caractérisation précédente, $\mathcal{I}$ n'est donc pas un ultrafiltre.

$$\boxed{\mathcal{I} \text{ n'est pas un ultrafiltre sur } \mathbb{N}}.$$

V Ultrafiltres

On considère la définition suivante.

Définition 1

Soit E un ensemble. On dit qu'un filtre $\mathcal{U}$ sur E est un ***ultrafiltre*** *lorsque*

$$\forall \mathcal{F} \in \Phi_E, \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{F}).$$

Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, $\bar{A}$ désignera le complémentaire de A dans E.

22. (a) Soit $a \in E$. On pose $A = \{a\}$. Montrer que $\mathcal{H}_A$ est un ultrafiltre sur E.
    (b) Soit A une partie de E contenant au moins deux éléments. Montrer que $\mathcal{H}_A$ n'est pas un ultrafiltre.