

# Programme de colle 12 : du 15/12 au 19/12

## Systèmes linéaires

- Vocabulaire, matrice/matrice augmentée du système.
- Opérations élémentaires, algorithme du pivot de Gauß, matrice ou système échelonné.
- Rang d'un système, d'une matrice, inconnues principales, inconnues secondaires.
- Compatibilité d'un système, expression des solutions, système de Cramer.

Exercices abordés dans le TD D1 : 1, 2, 3, 7.

## Groupes, anneaux, corps

- Loi de composition interne, associativité, commutativité, distributivité, élément neutre, symétrique, itérés d'un élément.
- Groupes (définition, exemples, dont le groupe des permutation d'une ensemble, les groupes produits).
- Sous-groupes, loi induite.
- Morphisme de groupe, iso- et auto-morphisme, noyau, critère d'injectivité et de surjectivité.
- Anneaux : définition, exemples, règles de calcul (dont binôme de Newton et formule de Bernoulli), sous-anneaux, morphismes d'anneaux.
- Élément inversible, diviseur de zéro, anneau intègre.
- Élément nilpotent, ordre (ou indice) de nilpotence.
- Corps : définition, exemples, sous-corps.

Exercices abordés dans le TD C2 : 1, 2, 3, 5, 6, 14.

## Questions de cours

- Trouver les  $\lambda$  tels que  $\begin{cases} 3x & - z = \lambda x \\ 2x + 4y + 2z = \lambda y \\ -x & + 3z = \lambda z \end{cases}$  ait une infinité de solutions. Les déterminer dans (un de) ces cas.
- Le centre d'un groupe est un groupe.
- Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes à l'aide du noyau.
- L'ensemble des automorphismes d'un groupe  $G$ ,  $(\text{Aut}(G), \circ)$ , est un groupe.
- L'ensemble des inversibles d'un anneau  $A$  est un groupe.
- Formule de Bernoulli (factorisation de  $a^n - b^n$ ).
- Si  $a \in A$  est nilpotent : inversibilité et inverse de  $1_A - a$  (*on peut indiquer de factoriser  $1_A - a^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$* ).

## Remarques

- On veillera à suivre l'algorithme du pivot de Gauß à la lettre et à formuler soigneusement les conclusions (vocabulaire employé, expression des solutions).
- Comme pour tous les chapitres d'algèbre, on sera très attentif au respect des définitions, du sens de ce qui est écrit et des méthodes.

## Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.