

Programme de colle 12 : du 15/12 au 19/12

Systèmes linéaires

- Vocabulaire, matrice/matrice augmentée du système.
- Opérations élémentaires, algorithme du pivot de Gauß, matrice ou système échelonné.
- Rang d'un système, d'une matrice, inconnues principales, inconnues secondaires.
- Compatibilité d'un système, expression des solutions, système de Cramer.

Exercices abordés dans le TD D1 : 1, 2, 3, 7.

Groupes, anneaux, corps

- Loi de composition interne, associativité, commutativité, distributivité, élément neutre, symétrique, itérés d'un élément.
- Groupes (définition, exemples, dont le groupe des permutation d'une ensemble, les groupes produits).
- Sous-groupes, loi induite.
- Morphisme de groupe, iso- et auto-morphisme, noyau, critère d'injectivité et de surjectivité.
- Anneaux : définition, exemples, règles de calcul (dont binôme de Newton et formule de Bernoulli), sous-anneaux, morphismes d'anneaux.
- Élément inversible, diviseur de zéro, anneau intègre.
- Élément nilpotent, ordre (ou indice) de nilpotence.
- Corps : définition, exemples, sous-corps.

Exercices abordés dans le TD C2 : 1, 2, 3, 5, 6, 14.

Questions de cours

- Trouver les λ tels que
$$\begin{cases} 3x & -z = \lambda x \\ 2x + 4y + 2z = \lambda y \\ -x & + 3z = \lambda z \end{cases}$$
 ait une infinité de solutions. Les déterminer dans (un de) ces cas.
- Le centre d'un groupe est un groupe.
- Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes à l'aide du noyau.
- L'ensemble des automorphismes d'un groupe G , $(\text{Aut}(G), \circ)$, est un groupe.
- L'ensemble des inversibles d'un anneau A est un groupe.
- Formule de Bernoulli (factorisation de $a^n - b^n$).
- Si $a \in A$ est nilpotent : inversibilité et inverse de $1_A - a$ (on peut indiquer de factoriser $1_A - a^n$ pour $n \in \mathbb{N}$).

Remarques

- On veillera à suivre l'algorithme du pivot de Gauß à la lettre et à formuler soigneusement les conclusions (vocabulaire employé, expression des solutions).
- Comme pour tous les chapitres d'algèbre, on sera très attentif au respect des définitions, du sens de ce qui est écrit et des méthodes.

Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.