

TD B4. Continuité et dérivabilité

1 Limites

Exercice B4.1

Montrer à l'aide de la définition seulement que $x \mapsto x^2 + 2x$ a pour limite 3 quand x tend vers 1.

Exercice B4.2

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodiques qui convergent en $+\infty$.

Exercice B4.3

Montrer que $\frac{x^x}{[x]^{[x]}}$ n'a pas de limite quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice B4.4

Calculer les limites suivantes.

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(\ln x))^2 - \cos^5 x + \ln x}{2^x - 50x^6};$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(1/x);$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x^2} - 1}{\ln x};$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \pi/3}.$$

2 Continuité

Exercice B4.5

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ \frac{xe^x}{1-e^x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice B4.6

Étudier la continuité et l'éventuel prolongement par continuité des fonctions suivantes.

$$1. f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x+1}{x^3+1}$$

$$2. g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$3. h : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

Exercice B4.7

Montrer que la fonction indicatrice de \mathbb{Q} n'est continue en aucun point. On rappelle que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice B4.8

Montrer que deux fonctions continues qui coïncident sur \mathbb{Q} coïncident sur \mathbb{R} .



Exercice B4.9

1. Trouver toutes les fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x^2) = f(x)$.
2. Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(3x) = f(x)$.

Exercice B4.10

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 1 telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f\left(\frac{x+3}{4}\right)$.

Exercice B4.11

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\int_0^1 t^n f(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Exercice B4.12

Montrer qu'il existe à tout instant deux points diamétralement opposés sur l'équateur où les températures sont égales.

3 Dérivabilité

Exercice B4.13

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a . Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a+h^2)}{h}$.

Exercice B4.14

Déterminer les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de f , montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de ce prolongement avec

$$(i) \quad f(x) = x \sin(1/x); \quad (ii) \quad f(x) = \frac{x^4}{e^x - 1}.$$

Exercice B4.15

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = e^{-1/x}$ et $g(x) = f(x)/x$.

1. Montrer que f et g sont \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* et que pour tout $x > 0$, on a $xf'(x) = g(x)$.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0.
3. Faire le tableau de variations de g sur \mathbb{R}_+ .

Exercice B4.16

Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x) - 1}{\sin x} & \text{si } x \in]0, \pi/2] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Étudier la continuité puis la dérivabilité de f en 0.

Exercice B4.17

Montrer que $x \mapsto x^x$ se prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R}_+ . Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

Exercice B4.18 

1. Exprimer la dérivée de $x \mapsto \ln|x|$ sur \mathbb{R}^* .
2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \ln|x|$ est prolongeable en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Exercice B4.19 

Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{sinon} \end{cases}$ soit continue sur \mathbb{R}_+ , dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice B4.20 

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} (x^x)^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+ et calculer f' .
2. f est-elle \mathcal{C}^1 ? deux fois dérivable?

Exercice B4.21 

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f'(b) < 0 < f'(a)$. Montrer que f' s'annule sur $]a, b[$.

Exercice B4.22  (Rolle généralisé)

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice B4.23 

Soit $a \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et f une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Montrer qu'il existe $c \in]a, a + 2h[$ tel que

$$f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c).$$

Exercice B4.24 

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que f s'annule en au moins n points a_1, \dots, a_n .

1. Soit $x \in [a, b] \setminus \{a_i \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$.

- (a) Déterminer $A \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi : t \mapsto f(t) - A \prod_{i=1}^n (t - a_i)$ s'annule en x .
- (b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{i=1}^n (x - a_i)$.

2. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq \frac{M}{n!} \prod_{i=1}^n |x - a_i|.$$


Exercice B4.25

Calculer l'expression de $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec

$$(i) \ f : x \mapsto \frac{1}{1-x}; \quad (ii) \ f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}; \quad (iii) \ f : x \mapsto x^2 e^{3x}.$$

Exercice B4.26

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée n -ième de $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée n -ième de $x \mapsto x \ln(1+x)$.

Exercice B4.27

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée n -ième de

1. $x \mapsto (x-1)e^{-x}$,
2. $x \mapsto x^{n-1} \ln(x)$,
3. $x \mapsto x^n e^x$.

Exercice B4.28

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer de deux manières la dérivée n -ième de $x \mapsto x^{2n}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice B4.29

Soit $f : x \mapsto e^{x\sqrt{3}} \sin(x)$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$, déterminer $A, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n)}(x) = A e^{x\sqrt{3}} \sin(x + \varphi).$$

Exercice B4.30

Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in [0, 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1} \end{cases}$.

1. Montrer que (u_n) est à valeurs dans $[0, 1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right) |u_n - \alpha|$ puis en déduire la limite de (u_n) .

Exercice B4.31

À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - x e^{\frac{1}{x}} \right)$.

Exercice B4.32

1. À l'aide d'un théorème des accroissements finis, montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$\frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k \ln(k)}.$$

2. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \right)_{n>2}$ est divergente.