

# Sol B4. Continuité et dérivabilité

## Exercice B4.2

Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  périodiques qui convergent en  $+\infty$ .

**Analyse.** Soit  $f$  une telle fonction, notons  $\ell$  sa limite en  $+\infty$  et  $T$  sa période (positive).  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) = f(x + nT)$ .

On fait tendre  $n$  vers  $+\infty$ . On a alors  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ell$ . Donc  $f$  est constante.

**Synthèse.** Les fonctions constantes sont périodiques et convergent en  $+\infty$ .

Conclusion : les solutions du problème sont les fonctions constantes.

## Exercice B4.3

Montrons que  $f : x \mapsto \frac{x^x}{[x]^{[x]}}$  n'a pas de limite quand  $x \rightarrow +\infty$  en exhibant deux suites de valeurs avec des comportements différents.

- D'une part,  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = \frac{n^n}{n^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .
- D'autre part,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} f\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{n + \frac{1}{2}}}{n^n} \\ &\geq \frac{n^{n + \frac{1}{2}}}{n^n} \text{ car } n \leq n + \frac{1}{2} \\ &\geq \frac{n^n n^{\frac{1}{2}}}{n^n} \\ &\geq n^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc  $f\left(n + \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  par comparaison.

Finalement,  $f$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .

## Exercice B4.4

$$(i) \frac{(\ln(\ln x))^2 - \cos^5 x + \ln x}{2^x - 50x^6} = \frac{\ln x}{2^x} \underbrace{\left( \dots \right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{0}.$$

(ii) Multiplier numérateur et dénominateur par  $x - 1$  pour faire apparaître deux taux d'accroissement en  $x \rightarrow 1$ . On peut aussi poser  $x = 1 + h$  et raisonner en  $h \rightarrow 0$ . Cela donne  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2 - x^2} - 1}{\ln x} = \boxed{-1}$ .

(iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = \boxed{0}$  par encadrement et  $\forall x \neq 0, x \sin(1/x) = \frac{\sin(1/x)}{1/x}$  donc  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(1/x) = \boxed{1}$  par composition de limites.

$$(iv) \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \pi/3} = -2 \frac{\sin(x - \pi/3)}{x - \pi/3} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \boxed{-2}.$$

**Exercice B4.5**

- $\forall x > 0, f(x) = x^x = e^{x \ln(x)}$ . Or  $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  (croissances comparées). Donc  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$ .
- $\forall x < 0, f(x) = \frac{xe^x}{1 - e^x} = - \left( \frac{e^x - 1}{x} \right) e^x$ . Or  $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$  (taux d'accroissement).  
Donc  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -1$ .

On ne peut donc pas prolonger  $f$  par continuité en 0.

**Exercice B4.6**

Étudier la continuité et l'éventuel prolongement par continuité des fonctions suivantes.

1.  $f$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  et  $\forall x \neq -1, f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} \xrightarrow{x \rightarrow -1} \frac{1}{3}$  donc  $f$  est prolongeable par continuité en  $-1$  par la valeur  $\frac{1}{3}$ .
2.  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  donc  $g$  est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0.
3.  $h$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .  $h$  a une limite infinie en  $-1^+$  et en  $-1^-$ . Donc  $h$  n'est pas prolongeable par continuité en 0.  
 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, h(x) = \frac{x-1}{1-x^2} = \frac{-1}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\frac{1}{2}$  donc  $h$  est prolongeable par continuité en 1 par la valeur  $-\frac{1}{2}$ .

**Exercice B4.9**

1. **Analyse** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\forall x \in [0, 1], f(x^2) = f(x)$ .  
Soit  $x \in [0, 1[$ . Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}, f(x^{2^n}) = f(x)$ .  
L'initialisation est vraie car  $f(x) = f(x)$ .  
Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $f(x^{2^n}) = f(x)$ .  
Alors  $f(x) = f(x^{2^n}) = f((x^{2^n})^2) = f(x^{2^n} \times 2) = f(x^{2^n+1})$ .  
Ainsi  $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f(x^{2^n})$ .  
Par passage à la limite et continuité de  $f, f(x) = f(0)$ . Donc  $f$  est constante sur  $[0, 1[$ .  
Finalement, par continuité,  $f$  est également constante sur  $[0, 1]$ .

**Synthèse** Les fonctions constantes sont continues et vérifient bien  $\forall x \in [0, 1], f(x^2) = f(x)$ .

Trouver toutes les fonctions continues  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f(x^2) = f(x)$ .

2. Même jeu avec  $f(x) = f\left(\frac{x}{3^n}\right)$ .

**Exercice B4.16**

$f$  est continue et dérivable sur  $]0, \pi/2]$  comme quotient de fonctions qui le sont, car  $\sin x \neq 0$  sur  $]0, \pi/2]$ .

Continuité en 0 :  $\forall x \in ]0, \pi/2], \frac{\cos(x) - 1}{\sin x} = \frac{\cos(x) - 1}{x} \frac{x}{\sin x}$ .

Or  $\frac{\cos(x) - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  et  $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$  (taux d'accroissement).

Donc  $\frac{\cos(x) - 1}{\sin x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f(0)$ , donc  $f$  est continue en 0.

Dérivabilité en 0 :  $\forall x \in ]0, \pi/2], \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\cos(x) - 1}{x \sin(x)}$ . Soit on utilise un encadrement de  $\cos x - 1$ , soit

on ruse pour revoir  $\sin$  :

$$\frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \frac{1}{1 + \cos x} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x} = \frac{1}{1 + \cos x} \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

Finalement  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = -\frac{1}{2}$ .

**Exercice B4.22** (Rolle généralisé)

Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, +\infty[$ , dérivable sur  $]a, +\infty[$  et telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$ .

- Si  $f$  est constante, tout  $c \in [a, +\infty[$  convient.
- Sinon, il existe  $x \in ]a, +\infty[$ ,  $f(x) \neq f(a)$ .

Soit  $\gamma$  strictement compris entre  $f(a)$  et  $f(x)$ .

Par théorème des valeurs intermédiaires sur  $[a, x]$  d'une part et d'autre part sur  $[x, +\infty[$  (détailler la généralisation) : il existe  $c_1 \in ]a, x[$  et  $c_2 \in ]x, +\infty[$  tels que  $f(c_1) = f(c_2) = \gamma$ . On peut alors appliquer le théorème de Rolle à  $f$ , continue sur  $[c_1, c_2]$  et dérivable sur  $]c_1, c_2[$ .

Dans tous les cas, il existe  $c \in ]a, +\infty[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice B4.27**

Calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la dérivée  $n$ -ième de

1. Soit  $g : x \mapsto x - 1$  et  $h : x \mapsto e^{-x}$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $h^{(k)} : x \mapsto (-1)^k e^{-x}$  (récurrence).  
De plus, pour tout  $k > 1$ ,  $g^{(k)}$  est la fonction nulle.

Leibniz :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = (-1)^n (x-1) e^{-x} + (-1)^{n-1} n e^{-x}$ . Donc

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (x-1-n) e^{-x}.$$

3. Soit  $g : x \mapsto x^n$  et  $h : x \mapsto e^x$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $h^{(k)} : x \mapsto e^x$ .

De plus, pour tout  $0 \leq k \leq n$ ,  $g^{(k)} : x \mapsto \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$  (récurrence).

Leibniz :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) \\ &= \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \binom{n}{k}^2 x^{n-k} \right) e^x \\ &= \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \binom{n}{k}^2 x^k \right) e^x. \end{aligned}$$

**Exercice B4.28**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f : x \mapsto x^{2n}$ .

D'une part,  $f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} x^n$ .

D'autre part,  $f(x) = x^n x^n$  et donc (formule de Leibniz)  $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 n! x^n$ .

En évaluant en  $x = 1$ ,  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ .