Chapitre B4

Continuité et dérivabilité

Objectifs

- Notions de limite et de continuité en un point, à droite, à gauche.
- Fonctions continues et prolongements par continuité.
- Approche locale de la dérivabilité.
- Étude globale des fonctions continues, dérivables.

1 Limites, continuité

Les notions de ce chapitre sont présentées pour une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Elles s'étendent (dans une mesure que l'on précisera) aux fonctions définies sur un domaine qui s'en rapproche ou s'y ramène simplement (par exemple $\mathbb{R}^*$ comme union de deux intervalles, *etc.*).
Dans toute la suite, on considère un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Notations. $\overline{\mathbb{R}}$ désigne $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On désigne par $\overline{I}$ l'intervalle I incluant ses bornes si elles sont finies. Par exemple $\overline{]0,1[} = [0,1]$.

1.1 Étude locale

Définition B4.1

Soit f une fonction définie sur I. Soit a un élément ou une extrémité de I et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ **quand** x **tend vers** a et on note $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ lorsque,

- pour $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

- pour $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$,

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[,\ f(x) > M,$$

- pour $a = +\infty$ et $\ell = +\infty$,

$$\forall M > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap [A, +\infty[,\ f(x) > M,$$

- pour $a = -\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]-\infty, A],\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Définition B4.2

Soit f définie sur I.

(i) Soit $a \in \overline{I}$. On dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ **au voisinage de** a lorsqu'il existe $\eta > 0$ tel que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ sur $I \cap]a-\eta, a+\eta[$.

(ii) Supposons que $+\infty$ est au bord de I. On dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ **au voisinage de** $+\infty$ s'il existe $A > 0$ tel que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ sur $I \cap [A, +\infty[$.

Remarques.

- Il existe bien sûr la même définition si l'on se place au voisinage de $-\infty$.
- On peut encore écrire cinq autres définitions de la limite dans les autres cas pour a et ℓ. Il est indispensable de savoir le faire. On peut aussi utiliser la notion de voisinage pour résumer la définition de $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ en une assertion :

  pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage W de a tel que pour tout $x \in I \cap W$, $f(x) \in V$.

Proposition B4.3 (Unicité de la limite)

Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$ et $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Notation. On peut donc noter $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Dém. B4.3

Supposons $\ell_1 \neq \ell_2$. Alors il existe un voisinage V_1 de ℓ_1 et un voisinage V_2 de ℓ_2 disjoints (par exemple si ℓ_1 et $\ell_2 \in \mathbb{R}$, on prend $V_1 =]\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon[$ et $V_2 =]\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon[$ avec $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{2}$).
Par définition, il existe W_1 voisinage de a tel que pour tout $x \in I \cap W_1$, $f(x) \in V_1$.
Et aussi il existe W_2 voisinage de a tel que pour tout $x \in I \cap W_2$, $f(x) \in V_2$.
Mais $W_1 \cap W_2$ est un voisinage (non vide) de a. Or pour $x \in W_1 \cap W_2$, $f(x) \in V_1 \cap V_2$, ce qui est impossible car on les a choisis disjoints.

Définition B4.4

Soit f définie sur I et $a \in I$. On dit que f est **continue en** a lorsque $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.

Remarque. On peut donc traduire cette définition en termes mathématiques : f est continue en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]a - \eta, a + \eta[, |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Définition B4.5 (À droite et à gauche)

Soit f définie sur I et a un élément ou une extrémité de I.

(i)
- Si $a \neq \sup(I)$, on dit que f admet une **limite à droite** en a lorsque $f|_{I \cap]a, +\infty[}$ admet une limite en a.
- Si $a \neq \inf(I)$, on dit que f admet une **limite à gauche** en a lorsque $f|_{I \cap]-\infty, a[}$ admet une limite en a.

(ii)
- Si $a \neq \sup(I)$, on dit que f est **continue à droite** en a lorsque $f|_{I \cap [a, +\infty[}$ est continue en a.
- Si $a \neq \inf(I)$, on dit que f est **continue à gauche** en a lorsque $f|_{I \cap]-\infty, a]}$ est continue en a.

Notations. On note $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} \ell$ ou encore, si on a l'existence de la limite, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{a^+} f = \ell$.

Proposition B4.6

(i) f admet une limite en a si et seulement si elle admet une limite à droite et à gauche en a et qu'elles sont égales.

(ii) f est continue en $a \in I$ si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a.

Théorème et définition B4.7

Soit $a \in I$ et f définie sur $I \setminus \{a\}$. Supposons que f admette une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a. Alors on peut définir la fonction

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell \text{ si } x = a \end{cases} \end{array}.$$

Cette fonction est continue en a et est appelée **prolongement par continuité** de f en a.

1.2 Opérations

Désormais f et g désignent deux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$. Les limites considérées s'entendent en un point de leur ensemble de définition ou au bord de ce dernier.

Proposition B4.8

(i) Si $f \underset{a}{\to} \ell \in \mathbb{R}$, alors f est bornée au voisinage de a.

(ii) Si $f \underset{a}{\to} \ell > 0$, alors il existe $m > 0$ tel que $f > m$ au voisinage de a.

Dém. B4.8

(i) On applique la définition avec $\varepsilon = 1$. Ceci montre que f est bornée au voisinage de a par $\ell - 1$ et $\ell + 1$.

(ii) Si $\ell \in \mathbb{R}_+$, on applique la définition avec $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2}$. Ceci montre que $f(x) \geqslant \ell - \ell/2$ dans un voisinage de a, ce qui est un minorant m strictement positif.
Si $\ell = +\infty$, on applique la définition avec n'importe quel seuil strictement positif.

Théorème B4.9 (Opérations algébriques)

Soit f, g deux fonctions définies sur I et $a \in \overline{I}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2$. Alors

(i) pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \alpha \ell_1 + \beta \ell_2$,

(ii) $(fg)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1 \ell_2$,

(iii) $|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} |\ell_1|$.

(iv) avec $\ell_1 \neq 0$, $(1/f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1/\ell_1$

Dém. B4.9

Démonstration partielle de la première propriété dans le cas où $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$.

(i) Soit $\varepsilon > 0$.

Soit V_1 voisinage de a tel que pour tout $x \in V_1$, $|f(x) - \ell_1| < \dfrac{\varepsilon}{2|\alpha|}$.
Soit V_2 voisinage de a tel que pour tout $x \in V_2$, $|g(x) - \ell_2| < \dfrac{\varepsilon}{2|\beta|}$.
Soit $V = V_1 \cap V_2$ voisinage de a. Alors pour tout $x \in V$,

$$|(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha\ell_1 + \beta\ell_2)| \leqslant |\alpha||f(x) - \ell_1| + |\beta||g(x) - \ell_2| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème B4.10 (Composition)

Si $f \underset{a}{\to} b$ et $g \underset{b}{\to} \ell$, alors $g \circ f \underset{a}{\to} \ell$.

Corollaire B4.11

Si f est continue en a et g continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Proposition B4.12 (Compatibilité avec la relation d'ordre)

Si $f \leqslant g$ au voisinage de a et $f \underset{a}{\to} \ell_1$ et $g \underset{a}{\to} \ell_2$, alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

Dém. B4.12

On travaille avec $g - f$ qui tend vers $\ell_2 - \ell_1$. Si $\ell_1 > \ell_2$, alors $\ell_1 - \ell_2 > 0$ et donc $f - g$ admet un minorant strictement positif dans un voisinage de a. Ceci contredit l'hypothèse sur le signe de $g - f$.

Remarque. En particulier, si $f \leqslant b$ au voisinage de a et $f \underset{a}{\to} \ell$, alors $\ell \leqslant b$.

Théorème B4.13 (Gendarmes)

(i) Si $g \leqslant f \leqslant h$ au voisinage de a et $g, h \underset{a}{\to} \ell$, alors $f \underset{a}{\to} \ell$.
(ii) Si $g \leqslant f$ au voisinage de a et $g \underset{a}{\to} +\infty$, alors $f \underset{a}{\to} +\infty$.

Théorème B4.14 (Caractérisation séquentielle de la limite)

On a équivalence entre
(i) $f \underset{a}{\to} \ell$,
(ii) Pour toute suite $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Remarque. On utilise aussi la contraposée de (i)⇒(ii), notamment pour démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite, ou est discontinue en un point.

Théorème B4.15 (Variations)

Soit f définie sur un intervalle de la forme $[a, b[$ ou $]a, b[$ (avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$) et croissante au voisinage de b. Alors

soit f est majorée au voisinage de b, alors elle admet une limite finie en b,

soit $f \underset{b}{\rightarrow} +\infty$.

Remarque. On a un résultat similaire avec une fonction décroissante, en remplaçant la majoration par une minoration, et $+\infty$ par $-\infty$.

1.3 Fonctions continues

Définition B4.16

On dit qu'une fonction f est **continue sur** I lorsqu'elle est continue en tout $a \in I$.

Notation. On désigne par $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions continues sur I.

Proposition B4.17

- Soit $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Alors
  (i) pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{C}(I)$,
  (ii) $fg \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$,
  (iii) $|f| \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
  (iv) $\dfrac{1}{f}$ est continue sur $I \setminus \{x \in I,\ f(x) = 0\}$.
- Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}(I)$.

Théorème B4.18 (Valeurs intermédiaires)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[a, b] \subset I$. Si

➢ f est continue sur $[a, b]$,

➢ γ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\gamma = f(c)$.

Théorème B4.19

L'image d'un intervalle (resp. d'un segment) par une fonction continue est un intervalle (resp. un segment).

Théorème B4.20

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Notation. En particulier f continue sur $[a, b]$ atteint son maximum et son minimum, notés $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Théorème B4.21

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Si f est injective, alors f est strictement monotone.

2 Dérivation des fonctions réelles

2.1 Dérivabilité

Définition B4.22

soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ différent de $\inf I$ (resp. $\sup I$).

(i) On dit que f est **dérivable à gauche** (resp. **à droite**) en a lorsque $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie à gauche (resp. à droite), appelée **nombre dérivé à gauche** (resp. **à droite**).

(ii) On dit que f est **dérivable en** a lorsqu'elle est dérivable à gauche et à droite en a et que les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux. Dans ce cas, leur valeur commune est appelée **nombre dérivé** de f en a et noté $f'(a)$.

(iii) f est **dérivable sur** I lorsqu'elle est dérivable en tout point $a \in I$. On peut alors définir sur I la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ appelée **fonction dérivée** de f.

Remarque. Autrement dit, f est dérivable en a si et seulement si son taux d'accroissement admet une limite finie lorsque x tend vers a et on a

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Définition B4.23

Étant donnés f une fonction dérivable en a, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, on définit **la tangente** en A à $\mathscr{C}$ comme la droite $\mathcal{T}_a$ d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Remarque. Cette droite est (en un sens topologique qu'on ne précisera pas dans le cadre de ce cours) la limite quand x tend vers a des droites sécantes à $\mathscr{C}$ en A et un point M d'abscisse x.

Proposition B4.24 (Développement limité à l'ordre 1)

soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors on a équivalence entre :

(i) f est dérivable en a.

(ii) Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et une fonction ε tels que :

$$\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \quad \text{et} \quad f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\varepsilon(x). \tag{B4.1}$$

Remarque. L'équation de la condition (B4.1) peut s'écrire

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Proposition B4.25

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Remarque. On peut écrire la même propriété à gauche et à droite.

Proposition B4.26 (Calcul de dérivées)

soit f et g dérivables en a et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

(i) $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$;

(ii) fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;

(iii) si $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$;

(iv) si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$;

(v) si g est dérivable en $b = f(a)$, $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$;

(vi) si f est strictement monotone sur I et à valeurs dans J, on peut définir sur J sa fonction réciproque f^{-1}. Dans ce cas, f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Théorème B4.27

soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a qui n'est pas une borne de I. Si f présente un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

2.2 Dérivées successives

Définition B4.28

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On note $f^{(0)} = f$.

(i) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $f^{(k-1)}$ définie. On dit que f est k **fois dérivable** sur I lorsque $f^{(k-1)}$ est dérivable. On note alors $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$, appelée **dérivée** k**-ième** de f.

(ii) f est **infiniment dérivable** lorsqu'elle est k fois dérivable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(iii) Si f est k fois dérivable et que $f^{(k)}$ est continue sur I, on dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^k$ sur I.

(iv) On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur I lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Remarques.

- On peut adapter ces définitions pour parler d'une fonction k fois (ou infiniment) dérivable en $a \in I$.
- Cependant, pour parler d'une fonction k fois dérivable en un seul point, l'existence de $f^{(k-1)}$ sur I tout entier est nécessaire.
- On écrit le plus souvent f' et f'' au lieu de $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$.

Notations. On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I. Lorsqu'aucune confusion n'est possible, on peut écrire simplement $\mathcal{C}^k(I)$ et $\mathcal{C}^\infty(I)$.

Proposition B4.29

soit $f, g \in \mathcal{C}^k(I)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et on a

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}.$$

Théorème B4.30 (Leibniz)

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, soit $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I)$). Alors fg est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Remarque. Même si on ne peut donner ici aucune formule générale pour les dérivées, on peut montrer que l'inverse d'une fonction $\mathcal{C}^k$ et la composée de deux fonctions $\mathcal{C}^k$ (moyennant les hypothèses usuelles) sont également de classe $\mathcal{C}^k$.

2.3 Étude globale des fonctions dérivables

Dans tout ce paragraphe, on donne $a < b$.

Théorème B4.31 (Rolle)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$,

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Les conséquences de ce théorème sont multiples. Parmi les plus connues et utiles, les deux résultats suivants.

Proposition B4.32

(i) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que f admet (au moins) $n+1$ zéros sur $[a, b]$. Alors f' admet (au moins) n zéros sur $]a, b[$.

(ii) Soit $f \in \mathcal{C}^n([a, b]$. On suppose que f admet (au moins) $n+1$ zéros sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Théorème B4.33 (Accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Proposition B4.34 (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, m \leqslant f'(x) \leqslant M$,

alors $m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$.

Corollaire B4.35

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si

- ➢ f est continue sur $[a, b]$,
- ➢ f est dérivable sur $]a, b[$,
- ➢ $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leqslant k$,

alors $|f(b) - f(a)| \leqslant k|b - a|$.

Théorème B4.36 (Limite de la dérivée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si

- ➢ f est continue sur I,
- ➢ f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$,
- ➢ f' admet pour limite ℓ en a,

alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} f'(a).$$

En particulier, si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

3 Cas des fonctions complexes

Définition B4.37

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f **tend vers** ℓ quand x tend vers a lorsque

$$|f(x) - \ell| \xrightarrow[x \to a]{} 0.$$

Proposition B4.38

Avec les notations précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$,

(ii) $\mathrm{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Im}(\ell)$.

Remarque. Les définition de la continuité en un point $x_0 \in I$ et sur I sont inchangées et on a

$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, f \text{ et } \mathrm{Im}\, f \text{ sont continues en } x_0.$$

Puis tout le paragraphe sur la dérivabilité peut être énoncé avec $f : I \to \mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème B4.39 (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Si

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leqslant M$,

alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$.

Méthodes

- Prolongement d'une fonction par continuité.
- Étude et interprétation de la dérivabilité
  - par taux d'accroissement,
  - via le développement limité à l'ordre 1
- Calcul des dérivées successives d'une fonction
  - par récurrence,
  - par la formule de Leibniz.
- Obtenir l'existence d'une solution à une équation
  - par théorème des valeurs intermédiaires,
  - via une dérivée par théorème de Rolle ou des accroissements finis.
- Obtenir une inégalité par l'IAF.