

Programme de colle 13 : du 05/01 au 09/01

Groupes, anneaux, corps

- Loi de composition interne, associativité, commutativité, distributivité, élément neutre, symétrique, itérés d'un élément.
- Groupes (définition, exemples, dont le groupe des permutation d'une ensemble, les groupes produits).
- Sous-groupes, loi induite.
- Morphisme de groupe, iso- et auto-morphisme, noyau, critère d'injectivité et de surjectivité.
- Anneaux : définition, exemples, règles de calcul (dont binôme de Newton et formule de Bernoulli), sous-anneaux, morphismes d'anneaux.
- Élément inversible, diviseur de zéro, anneau intègre.
- Élément nilpotent, ordre (ou indice) de nilpotence.
- Corps : définition, exemples, sous-corps.

Exercices abordés dans le TD C2 : 1, 2, 3, 5, 6, 14.

Continuité

- Limites d'une fonction : définitions de limite et continuité en un point, à droite, à gauche, prolongement par continuité.
- Opérations sur les limites, inégalités, gendarmes, caractérisation séquentielle.
- Fonctions continues sur un intervalle, opérations, théorèmes des valeurs intermédiaires et des bornes atteintes. Une fonction continue injective est strictement monotone.
- Dérivabilité, à droite à gauche, équation de la tangente, DL1.

Exercices abordés dans le TD B4 : 2, 3, 4, 5, 6, 9, 14, 16.

Questions de cours

- Le centre d'un groupe est un groupe.
- Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes à l'aide du noyau.
- L'ensemble des automorphismes d'un groupe G , $(\text{Aut}(G), \circ)$, est un groupe.
- L'ensemble des inversibles d'un anneau A est un groupe.
- Formule de Bernoulli (factorisation de $a^n - b^n$).
- Si $a \in A$ est nilpotent : inversibilité et inverse de $1_A - a$ (on peut indiquer de factoriser $1_A - a^n$ pour $n \in \mathbb{N}$).
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Théorème des valeurs intermédiaires et sa démonstration.
- Théorème du point fixe (de Brouwer) pour $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
- Régularité de la fonction $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et de son prolongement en 0.

Remarques

- Comme pour tous les chapitres d'algèbre, on sera très attentif au respect des définitions, du sens de ce qui est écrit et des méthodes.
- Pas de théorèmes généraux sur les fonctions dérivables cette semaine.

Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.