TD C3. Arithmétique des entiers

1 Divisibilité, congruences

Exercice C3.2

À l'aide de congruences, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{2n+2}$,
2. $6 \mid 5n^3 + n$,
3. $9 \mid 4^n - 3n - 1$.

Exercice C3.3 ✲

1. Faux ou faux ? Justifier. Soit $a, b, d, n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Si a et b divisent n, alors ab divise n.
   (b) Si d divise ab, alors d divise a ou d divise b.
   (c) Si d divise n^2, alors d divise n
   (d) L'intervalle $[\![0, 280]\!]$ contient 10 entiers divisibles par 28.
   (e) Si $n \equiv 1\ [25]$, alors n est impair.
   (f) Si $a^2 \equiv 1\ [n]$, alors $a \equiv \pm 1\ [n]$.
   (g) Si $4a \equiv 4b\ [6]$, alors $a \equiv b\ [6]$.
   (h) Si $a \equiv b\ [n]$, alors $d^a \equiv d^b\ [n]$.
2. Concevoir un exercice intitulé "Vrai ou vrai ? Justifier." dont les 8 items ressembleraient aux assertions ci-dessus, modifiées de la manière la plus infime possible.
3. Répondre aux questions de ce nouvel exercice.

Exercice C3.5 ✲

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note a_0 son chiffre des unités, a_1 son chiffre des dizaines, etc. Sous forme décimale : on note $n = \overline{a_r a_{r-1} \dots a_2 a_1 a_0}^{10}$, avec $r \in \mathbb{N}$ et $a_i \in [\![0, 9]\!]$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant r$. Montrer que n est divisible

1. par 2 si et seulement si $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$,
2. par 5 si et seulement si $a_0 \in \{0, 5\}$;
3. par 4 si et seulement si $\overline{a_1 a_0}^{10}$ est divisible par 4,
4. par 8 si et seulement si $\overline{a_2 a_1 a_0}^{10}$ est divisible par 8,
5. par 3 si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} a_i$ est divisible par 3,
6. par 9 si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} a_i$ est divisible par 9,
7. par 7 si et seulement si $\overline{a_r \dots a_2 a_1}^{10} - 2a_0$ est divisible par 7,
8. par 11 si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} (-1)^i a_i$ est divisible par 11.

Exercice C3.7 ✲

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice C3.11 ✿

Montrer que $7^4 \equiv 1$ [10]. En déduire le chiffre des unités de 7^{7^7} ?

Exercice C3.13

Trouver tous les entiers x vérifiant $\begin{cases} x \equiv 2 \ [10] \\ x \equiv 5 \ [13] \end{cases}$.

Exercice C3.17 ✿

15 astronautes découvrent un précieux stock de nourriture sur une planète désertique. Après un partage (rigoureusement équitable), il reste 3 rations. La discussion s'anime. Bilan : 8 astronautes flottant mystérieusement dans le vide intersidéral. Les 7 rescapés reprennent le partage, mais il reste encore 2 rations. Cette fois, la querelle devient plus intense, et après quelques « accidents », il ne reste que 4 astronautes. Fort heureusement, ils peuvent enfin se partager la nourriture sans qu'il n'y ait de surplus à négocier. Combien de rations, au minimum, a chaque astronaute ?

Exercice C3.19 ✿

1. Montrer que 888888887 ne peut pas s'écrire comme somme de trois carrés d'entiers.
2. Montrer que 999999994 ne peut pas s'écrire comme somme de trois cubes d'entiers.

Exercice C3.23 ✿

Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor k\frac{p}{q} \right\rfloor$.

2 PGCD, PPCM

Exercice C3.29

Déterminer dans chaque cas le PGCD, le PPCM et un couple de coefficients de Bézout pour a et b.

1. $a = 270$ et $b = 105$,
2. $a = 374$ et $b = 781$,
3. $a = 840$ et $b = 532$.

Exercice C3.31 ✿

Déterminer le PGCD des nombres a et b dans chacun des cas suivants.

1. $a = 2^{445} + 7$ et $b = 15$.
2. $a = 15n^2 + 8n + 6$ et $b = 30n^2 + 21n + 13$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice C3.37 ✿

Trouver tous les couples d'entiers (a, b) tels que

1. $a \wedge b = 50$ et $a \vee b = 600$,
2. $a \wedge b = 6$ et $a + b = 48$,
3. $a \wedge b = 18$ et $ab = 6480$.

Exercice C3.41 ✿✿

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. En déduire que $\binom{2n}{n}$ est divisible par $n+1$.

Exercice C3.43 ✿✿

Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{U}_a \cap \mathbb{U}_b = \mathbb{U}_{a \wedge b}$.

Exercice C3.47 ✿✿

Je multiplie mon jour de naissance par 31 et le numéro de mon mois de naissance par 12. La somme de ces deux résultats donne 830. Quelle est ma date de naissance ?

Exercice C3.53

Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que

1. $a^2 - b^2 = 7$,
2. $a \wedge b = 3$ et $a + b = 18$,
3. $15a^2 - 7b^2 = 9$ (on pourra raisonner modulo 3).

Exercice C3.57

Le jour de son 18ᵉ anniversaire, Alexandre Grothendieck décide de vivre selon les deux règles suivantes.

- Tous les 51 jours, il fera une séance de méditation.
- Tous les 57 jours, il démontrera un théorème mathématique.

Au cours de sa vie, à combien de reprises aura-t-il médité et démontré un théorème le même jour ?

3 Nombres premiers

Exercice C3.59 ✿

Montrer que $\forall p \in \mathbb{P} \setminus \{2, 3\}$, $p^2 \equiv 1$ [24].

Exercice C3.61 ✿

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n-ième nombre premier. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $p_{n+1} < \prod_{i=1}^{n} p_i$.

Exercice C3.67

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si a^2 divise b^2, alors a divise b.

Exercice C3.71 ✿✿✿

Un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est divisible par tous les entiers de 2 à 31 (inclus) sauf par exactement 2 d'entre eux qui sont consécutifs. Quels sont ces deux entiers consécutifs ?

Exercice C3.73 ✿✿

On note $\mathrm{Div}(n)$ l'ensemble des diviseurs d'un entier n. Soit $a, b \in \mathbb{N}$ premiers entre eux. Montrer que

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathrm{Div}(a) \times \mathrm{Div}(b) & \longrightarrow & \mathrm{Div}(ab) \\ (k, \ell) & \longmapsto & k\ell \end{array}$$

est bijective.

Exercice C3.79 ✿✿

Montrer qu'il existe un multiple de 2026, constitué uniquement de chiffres 2.

Exercice C3.83 ✿✿ (Mersenne et Fermat)

Soit a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.
2. (a) Montrer que si $a^n + 1$ est premier, alors a est pair et n est une puissance de 2.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$, appelé n-ième nombre de Fermat. Montrer que $F_{n+1} = 2 + \prod_{i=0}^{n} F_i$.
   (c) En déduire que pour tous entiers naturels $m \neq n$, $F_m \wedge F_n = 1$.