Problème 1

Soit $(I_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

   $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1}$.

   Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$.

   Cela permet de calculer $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

2. Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$. Donc $0 \leqslant \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$. Par croissance de l'intégrale, on a donc $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, ce qui montre que $\boxed{(I_n) \text{ est une suite décroissante de termes positifs ou nuls}}$.

   La suite (I_n) étant décroissante et minorée (par 0), $\boxed{\text{elle est convergente}}$.

3. Soit $n \geqslant 2$. $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

   On intègre par parties en posant $\begin{cases} u(t) = \sin^{n-1}(t) \\ v'(t) = \sin(t) \end{cases}$. Alors $\begin{cases} u'(t) = (n-1)\cos(t)\sin^{n-2}(t) \\ v(t) = -\cos(t) \end{cases}$.

   $I_n = \left[-\cos(t)\sin^{n-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^{n-2}(t) = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^{n-2}(t)$.

   Ainsi $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$. Et donc $\boxed{I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}}$.

4. La relation précédente s'écrit pour $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

   Alors $I_{n+2}I_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n I_{n+1}$, *i.e.* $(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1}$.

   Cela montre que $\boxed{((n+1)I_nI_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$, égale à $I_0I_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

5. (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, donc $0 \leqslant (n+1)I_{n+1}I_{n+1} \leqslant (n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{4}$.

   Ainsi $0 \leqslant I_{n+1}^2 \leqslant \dfrac{\pi}{4(n+1)}$, soit $0 \leqslant |I_n| \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$. Par encadrement, $\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ donc, comme $I_n \neq 0$, $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$, soit, d'après 3, $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$. Or $\dfrac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc par encadrement, $\boxed{\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$.

   (c) Sur le même principe, pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+1} \geqslant I_n \geqslant I_{n-1}$ donne : $nI_nI_{n+1} \geqslant nI_nI_n \geqslant nI_nI_{n-1}$, ou encore $\dfrac{n}{n+1}(n+1)I_nI_{n+1} \geqslant nI_nI_n \geqslant nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{4}$. Par encadrement, on obtient $nI_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{4}$, d'où $\boxed{\sqrt{n}I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$

6. D'après 3, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{array}{l} I_{2n} = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\right) I_0 \\ I_{2n+1} = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}\right) I_1 \end{array}$, soit $\boxed{\begin{array}{l} I_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \\ I_{2n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \end{array}}$.

Problème 2

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

Étude de l'intégrale

1. $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (par quotient avec $1+t^2 \neq 0$) donc sur $[1, x]$ (ou $[x, 1]$), pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donc par théorème fondamental de l'analyse, $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$.

2. D'après le théorème fondamental, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{g'(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}}$, négatif sur $]0,1[$, positif sur $]1,+\infty[$, nul en 1.
Donc $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur }]0,1[\text{ et croissante sur }]1,+\infty[}$.

3. Comme $g(0) = 0$, $\boxed{g \text{ est positive sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ nulle en } 1}$.

4. $1 + x^2 \xrightarrow[x\to 1]{} 2$ et $\dfrac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} 1$ par exemple par taux d'accroissement. Donc $\boxed{\dfrac{g'(x)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} \dfrac{1}{2}}$.
Soit $\varepsilon > 0$ et $0 < \eta < 1$ tel que $\forall t \in [1-\eta, 1+\eta] \setminus \{1\}$, $\dfrac{1}{2} - \varepsilon \leqslant \dfrac{g'(t)}{t-1} \leqslant \dfrac{1}{2} + \varepsilon$. On a alors, pour tout $t \in [1-\eta, 1+\eta]$,
$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)(t-1) \leqslant g'(t) \leqslant \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)(t-1).$$
Soit $x \in [1-\eta, 1+\eta] \setminus \{1\}$. Par croissance de l'intégrale de 1 à x,
$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\frac{(x-1)^2}{2} \leqslant g(x) \leqslant \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\frac{(x-1)^2}{2} \text{ car } g(1) = 0.$$
Ceci montre que $\boxed{\dfrac{g(x)}{(x-1)^2} \xrightarrow[x\to 1]{} \dfrac{1}{4}}$.
Interprétation graphique : la courbe représentative de g présente l'allure d'une parabole ($x \mapsto \dfrac{1}{4}(x-1)^2$) au voisinage de $x = 1$.

5. On effectue le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$; $\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
$g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)} = \int_1^{1/x} -\frac{\ln(1/u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_1^{1/x} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \boxed{g(1/x)}$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = g(1/x)$.

Précisions graphiques

Soit h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x}$.

6. $\dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ (taux d'accroissement) donc poser $\boxed{h(0)=1 \text{ prolonge } h \text{ par continuité en } 0}$.
7. On effectue une intégration par parties avec $t \mapsto \operatorname{Arctan} t$ et $t \mapsto \ln(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. $g(x) = [\operatorname{Arctan}(t)\ln(t)]_1^x - \displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,\mathrm{d}t$. Donc $\boxed{g(x) = \operatorname{Arctan}(x)\ln(x) - \displaystyle\int_1^x h(t)\,\mathrm{d}t}$.
8. $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\operatorname{Arctan}(x)\ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x)$, qui tend vers 0 en 0 par croissances comparées. De plus, h est désormais continue sur $[0,1]$, ainsi $\displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$.
   Donc poser $\boxed{g(0) = \displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t \text{ prolonge } g \text{ par continuité en } 0}$.
   $x \mapsto \displaystyle\int_1^x h(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable en 0 par théorème fondamental car h est continue sur $[0,1]$.
   Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)\ln(x)$, prolongée par continuité en 0 par $f(0)=0$.
   Alors pour tout $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\operatorname{Arctan}(x)\ln(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$. Ainsi f n'est pas dérivable en 0. Et donc $\boxed{g \text{ n'est pas dérivable en } 0}$ (sinon $f : x \mapsto g(x) + \displaystyle\int_1^x h(t)\,\mathrm{d}t$ le serait aussi).
9. La courbe de g présente une demi-tangente verticale en 0 et (comme $g(x) = g(1/x)$ pour tout x) g tend vers $g(0)$ en $+\infty$.

Valeur de $g(0)$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f_k : x \mapsto \displaystyle\int_1^x t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

10. Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_k(x) = \left[\dfrac{t^{k+1}\ln(t)}{k+1}\right]_1^x - \displaystyle\int_1^x \frac{t^k}{k+1}\,\mathrm{d}t$.
    Ainsi $\boxed{f_k(x) = \dfrac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \dfrac{x^{k+1}-1}{(k+1)^2}}$.
11. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.
    La somme géométrique donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$, d'où
    $\boxed{\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}}$.
12. $\forall t \geqslant 1$, $\dfrac{\ln(t)}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\ln(t) + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2}$. Par croissance de l'intégrale sur $[1,x]$ pour $x>1$: $g(x) \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_{2k}(x) + (-1)^{n+1}\int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
    Cela donne, en valeurs absolues : $\boxed{\left| g(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_{2k}(x) \right| \leqslant f_{2n+2}(x)}$.
    On fait le même raisonnement sur $[x,1]$ en faisant attention aux signes dans les inégalités.

13. On fait tendre x vers 0. D'après la formule de 10, $f_k(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

    Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\left| g(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leqslant \frac{1}{(2n+3)^2}}$.

14. Avec $n = 4$, l'estimation d'erreur ci-dessus donne $\left| g(0) - \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leqslant \frac{1}{121} \leqslant 10^{-2}$. D'où une valeur approchée de $g(0)$ à 10^{-2} près : $\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \frac{1}{81} = \boxed{\frac{91369}{99225}}$.

15. Une allure de $\mathcal{C}_g$ se déduit de l'ensemble des résultats précédents : minimum nul en $x = 1$, symétrie par rapport à la transformation $x \mapsto 1/x$, demi-tangente verticale en 0 et asymptote horizontale en $+\infty$.