DEVOIR MAISON N° 11

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Dans ce problème, $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ désigne une fonction continue. Étant donnés $a, b \in \mathbb{R}$ fixés, on considère l'équation différentielle

$$t^2y'' + aty' + by = g(t) \qquad (E)$$

1. On note (E_0) l'équation homogène associée (toujours pour $t \in \mathbb{R}_+^*$). Montrer que $t \mapsto t^m$ est solution si et seulement si m est solution de l'équation $X(X-1) + aX + b = 0$.
2. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, on pose u définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = f(e^x)$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si u est solution (définie pour $x \in \mathbb{R}$) de

$$u'' + (a-1)u' + bu = g(e^x). \qquad (E')$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ les équations différentielles suivantes.
   (a) $t^2y'' + 5ty' + 4y = t$,
   (b) $t^2y'' + y = t + \dfrac{1}{t}$.
4. Résoudre (*i.e.* trouver toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui vérifient, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$)

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Problème 2

1. Montrer que l'équation $X^2 - X - 1 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes.
   On notera φ la plus grande de ces solutions et $\hat{\varphi}$ la plus petite. Dans tout le problème (y compris dans cette question) on ne cherchera pas à donner une expression explicite de φ et $\hat{\varphi}$. On admet aussi que φ et $\hat{\varphi}$ sont irrationnels.
   Sans calculer φ et $\hat{\varphi}$, donner les valeurs de $\varphi + \hat{\varphi}$ et $\varphi\hat{\varphi}$.

On note $\mathbb{Z}[\varphi]$ l'ensemble suivant.

$$\mathbb{Z}[\varphi] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ x = a + b\varphi\right\}.$$

2. Montrer que $\mathbb{Z}[\varphi]$ est un sous-anneau du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$.

On note G le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}[\varphi], +, \times)$.

3. Soit $x \in \mathbb{Z}[\varphi]$. Montrer qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\varphi$.
4. Soit $x = a + b\varphi$, avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. L'unicité du couple (a,b) nous permet de poser $\hat{x} = a + b\hat{\varphi}$ et $N(x) = x\hat{x}$.

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}[\varphi], \quad N(x) \in \mathbb{Z}$.

(b) Montrer que $\forall x, x' \in \mathbb{Z}[\varphi], \quad \widehat{xx'} = \hat{x}\hat{x'}$.

(c) En déduire que $\forall x, x' \in \mathbb{Z}[\varphi], \quad N(xx') = N(x)N(x')$.

5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}[\varphi], \quad x \in G \Leftrightarrow N(x) \in \{-1, 1\}$. $\mathbb{Z}[\varphi]$ est-il un corps ?
6. On pose $H = G \cap]1, +\infty[$.

   (a) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On pose $x = a + b\varphi$. Montrer que si $x \in H$, alors $a \geqslant 0$ et $b > 0$.

   (b) En déduire que φ est le plus petit élément de H.

   (c) Soit $x \in H$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\varphi^p \leqslant x < \varphi^{p+1}.$$

   (d) En déduire que $H = \{\varphi^p \mid p \in \mathbb{N}^*\}$.
7. Montrer que
$$\begin{array}{rccc} \Theta : & \mathbb{U}_2 \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ & (\varepsilon, p) & \longmapsto & \varepsilon\varphi^p \end{array}$$
   est un isomorphisme de groupes.