Problème 1

Dans ce problème, $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ désigne une fonction continue. Étant donnés $a, b \in \mathbb{R}$ fixés, on considère l'équation différentielle

$$t^2 y'' + aty' + by = g(t) \tag{E}$$

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. $y : t \mapsto t^m$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(t) = mt^{m-1} \text{ et } y''(t) = m(m-1)t^{m-2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E_0) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t^2 y''(t) + aty'(t) + by(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ (m(m-1) + am + b)\, t^m = 0 \\ &\Leftrightarrow m(m-1) + am + b = 0 \end{aligned}$$

car $t^m \neq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Finalement,

$$\boxed{t \mapsto t^m \text{ est solution de } (E_0) \iff m \text{ est solution de } X(X-1) + aX + b = 0.}$$

2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et définissons $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = f(e^x).$$

De manière équivalente, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(t) = u(\ln t)$.
Par composition, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si u est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(t) = \frac{1}{t} u'(\ln t) \quad \text{et} \quad f''(t) = \frac{1}{t^2} u''(\ln t) - \frac{1}{t^2} u'(\ln t).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } E &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t^2 f''(t) + atf'(t) + bf(t) = g(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ u''(\ln t) + (a-1)u'(\ln t) + bu(\ln t) = g(t) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ u''(x) + (a-1)u'(x) + bu(x) = g(e^x) \end{aligned}$$

car $t \mapsto \ln t$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi

$$\boxed{f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \iff u \text{ est solution de } (E') \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

3. (a) $m(m-1) + 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -2$, qui est aussi l'équation caractéristique de (E').
Les solutions u de l'équation homogène associée à $(E') : u'' + 4u' + 4u = e^x$ sont

$$\left\{ x \mapsto (Ax + B)e^{2x} \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ainsi, en posant $x = \ln t$, les solutions de l'équation homogène (E_0) sont $\left\{ t \mapsto \dfrac{A + B \ln t}{t^2} \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}$.
Enfin $x \mapsto \dfrac{1}{9} e^x$ est solution particulière de (E'). Les solutions sont donc

$$\boxed{\left\{ t \mapsto \frac{A + B \ln t}{t^2} + \frac{t}{9} \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}}.$$

(b) L'équation (E') associée est $u''-u'+u=e^x+e^{-x}$.

L'équation $m(m-1)+1=0$ a deux solutions complexes : $\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. D'où les solutions de l'équation homogène associée à (E') :

$$\left\{x\mapsto e^{\frac{1}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\right\}.$$

En posant $x=\ln t$, on a les solutions de l'équation homogène.

$$\left\{t\mapsto \sqrt{t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right)\right)\right\}.$$

On cherche une solution particulière par superposition. On obtient $y_p(t)=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2}t^{-1}$. Finalement, les solutions sont

$$\boxed{\left\{t\mapsto \sqrt{t}\Big(A\cos\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ln t\Big)+B\sin\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ln t\Big)\Big)+\frac{1}{2}\Big(t+\frac{1}{t}\Big)\right\}}.$$

4. $\boxed{\textbf{Analyse}}$ Soit f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)=f\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$.

$x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f''(x)=\dfrac{-1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{-1}{x^2}f(x)$.

Ainsi, f est solution de l'équation $x^2y''+y=0$, résolue précédemment.

Donc $f\in\left\{x\mapsto\sqrt{x}\left(A\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+B\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)\right\}$.

$\boxed{\textbf{Synthèse}}$ Soit $A,B\in\mathbb{R}$ et $f: x\mapsto\sqrt{x}\left(A\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+B\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\Bigg[&\frac{1}{2}\Big(A\cos\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\Big)+B\sin\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\Big)\Big)\\&+\frac{\sqrt{3}}{2}\Big(-A\sin\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\Big)+B\cos\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\Big)\Big)\Bigg]\end{aligned}$$

et

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\Big(A\cos\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\Big)-B\sin\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\Big)\Big).$$

On a $f'(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ dès lors que $\begin{cases}\dfrac{1}{2}A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}B=A\\ \dfrac{1}{2}A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}B=A\end{cases}$,*i.e.* $\sqrt{3}B=A$.

En conclusion, les solutions sont

$$\boxed{\left\{x\mapsto C\sqrt{x}\cos\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x-\frac{\pi}{6}\Big)\mid C\in\mathbb{R}\right\}}.$$

Problème 2

1. Le discriminant du trinôme $X^2 - X - 1$ est $\Delta = 5$. Comme $\Delta > 0$,

$$\boxed{\text{le trinôme } X^2 - X - 1 \text{ admet deux racines réelles distinctes.}}$$

   On note φ et $\hat{\varphi}$ ces deux solutions, de sorte que $\hat{\varphi} < \varphi$.
   On a (somme et produit des racines d'un trinôme) $\boxed{\varphi + \hat{\varphi} = 1}$ et $\boxed{\varphi\hat{\varphi} = -1}$.

2. Montrons que $\mathbb{Z}[\varphi]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
   - Par définition de $\mathbb{Z}[\varphi]$, $\mathbb{Z}[\varphi] \subset \mathbb{R}$.
   - Pour $(a, b) = (0, 0)$, on obtient $a + b\varphi = 0$, donc $0 \in \mathbb{Z}[\varphi]$.
   - Pour $(a, b) = (1, 0)$, on obtient $a + b\varphi = 1$, donc $1 \in \mathbb{Z}[\varphi]$.
   - Soit $x, x' \in \mathbb{Z}[\varphi]$. Il existe $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\varphi$ et $x' = a' + b'\varphi$. On a alors

$$x + x' = (a + a') + (b + b')\varphi.$$

     Comme $a + a' \in \mathbb{Z}$ et $b + b' \in \mathbb{Z}$, on a $x + x' \in \mathbb{Z}[\varphi]$. Donc $\mathbb{Z}[\varphi]$ est stable par $+$.
   - Comme $\varphi^2 = \varphi + 1$,

$$xx' = (aa' + bb') + (ab' + ba' + bb')\varphi.$$

     Comme $aa' + bb' \in \mathbb{Z}$ et $ab' + ba' + bb' \in \mathbb{Z}$, on a $xx' \in \mathbb{Z}[\varphi]$. Donc $\mathbb{Z}[\varphi]$ est stable par $\times$.
   - Enfin,

$$-x = (-a) + (-b)\varphi.$$

     Comme $-a \in \mathbb{Z}$ et $-b \in \mathbb{Z}$, on a $-x \in \mathbb{Z}[\varphi]$. Donc $\mathbb{Z}[\varphi]$ est stable par passage à l'opposé.

$$\boxed{\mathbb{Z}[\varphi] \text{ est un sous-anneau de } (\mathbb{R}, +, \times)}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{Z}[\varphi]$. Supposons $x = a + b\varphi = a' + b'\varphi$, avec $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$. Par différence,

$$a - a' = (b' - b)\varphi.$$

   Si $b \neq b'$, alors φ serait rationnel. Donc $b = b'$ et $a = a'$. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}[\varphi],\ \exists!\,(a, b) \in \mathbb{Z}^2,\ x = a + b\varphi}.$$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{Z}[\varphi]$, avec $x = a + b\varphi$. On a

$$\begin{aligned} N(x) &= x\hat{x} \\ &= (a + b\varphi)(a + b\hat{\varphi}) \\ &= a^2 + ab(\varphi + \hat{\varphi}) + b^2\varphi\hat{\varphi} \\ &= a^2 + ab - b^2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}[\varphi], \quad N(x) \in \mathbb{Z}}$.

   (b) Soit $x, x' \in \mathbb{Z}[\varphi]$. On écrit $x = a + b\varphi$ et $x' = a' + b'\varphi$, avec $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$. Comme φ et $\hat{\varphi}$ sont racines du trinôme $X^2 - X - 1$, on a

$$\begin{aligned} \widehat{xx'} &= (aa' + bb') + (ab' + ba' + bb')\hat{\varphi} \\ \hat{x} \times \hat{x'} &= (a + b\hat{\varphi})\left(a' + b'\hat{\varphi}\right) = (aa' + bb') + (ab' + ba' + bb')\hat{\varphi}. \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\widehat{xx'} = \hat{x}\hat{x'}}$.

(c) On déduit

$$N(xx') = (xx')\widehat{(xx')} = xx'\hat{x}\hat{x'} = (x\hat{x})\left(x'\hat{x'}\right) = N(x)N(x').$$

Donc $\boxed{N(xx') = N(x)N(x')}$.

5. Soit $x \in G$. Il existe $y \in \mathbb{Z}[\varphi]$ tel que $xy = 1$. On en déduit

$$N(x)N(y) = N(xy) = N(1) = 1.$$

Comme $N(x), N(y) \in \mathbb{Z}$, $N(x)$ divise 1. On en déduit

$$N(x) \in \{-1, 1\}.$$

Réciproquement, soit $x \in \mathbb{Z}[\varphi]$ tel que $N(x) \in \{-1, 1\}$.
Remarquons que puisque $\hat{\varphi} = 1 - \varphi$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a + b\hat{\varphi} = a + b - b\varphi \in \mathbb{Z}[\varphi]$.

- Si $N(x) = 1$, on a $x\hat{x} = 1$. Comme $\hat{x} \in \mathbb{Z}[\varphi]$, x est inversible dans $\mathbb{Z}[\varphi]$ et $x^{-1} = \hat{x}$.
- Si $N(x) = -1$, on a $x \times (-\hat{x}) = 1$. Comme $-\hat{x} \in \mathbb{Z}[\varphi]$, x est inversible dans $\mathbb{Z}[\varphi]$ et $x^{-1} = -\hat{x}$.

Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}[\varphi],\ x \in G \Leftrightarrow N(x) \in \{-1, 1\}}.$$

Comme $2 \in \mathbb{Z}[\varphi]$ et $N(2) = 4$, 2 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}[\varphi]$. Donc

$$\boxed{\mathbb{Z}[\varphi] \text{ n'est pas un corps}}.$$

6. (a) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $x = a + b\varphi$. Supposons $x \in H$. On a alors $x \in G$ et $x > 1$. On en déduit que x est inversible dans $\mathbb{Z}[\varphi]$ et $0 < x^{-1} < 1$. De plus, d'après la question précédente, $N(x) = 1$ ou $N(x) = -1$.

- Si $N(x) = 1$, alors $x^{-1} = \hat{x}$. Ainsi $-1 < -\hat{x}$, d'où $0 < x - \hat{x} = b(\varphi - \hat{\varphi})$ et donc $b > 0$ car $\hat{\varphi} < \varphi$. De plus, comme $\varphi \times \hat{\varphi} < 0$, on a nécessairement $\varphi > 0$ et $\hat{\varphi} < 0$. Donc $0 < a + b\hat{\varphi} < a$.
- Si $N(x) = -1$, alors $x^{-1} = -\hat{x}$. Ainsi $1 < x - \hat{x} = b(\varphi - \hat{\varphi})$ et donc $b > 0$ car $\hat{\varphi} < \varphi$. Comme $-1 < \hat{x}$, on en déduit $-1 < a + b\hat{\varphi} < a$ et donc $0 \leqslant a$ car $a \in \mathbb{Z}$.

Donc, dans les deux cas, $\boxed{\text{si } a + b\varphi \in H, \text{ alors } a \geqslant 0 \text{ et } b > 0}$.

(b) Tout d'abord, $N(\varphi) = \varphi \times \hat{\varphi} = -1$, donc $\varphi \in G$. De plus, comme $\varphi + \hat{\varphi} = 1$ et $\hat{\varphi} < 0$, $\varphi > 1$.
Donc $\boxed{\varphi \in H}$.
Montrons maintenant que φ est un minorant de H. Soit $x \in H$. En particulier, $x \in \mathbb{Z}[\varphi]$, donc il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\varphi$. D'après la question précédente, $a \geqslant 0$ et $b > 0$. On en déduit $b \geqslant 1$ car $b \in \mathbb{Z}$, puis $a + b\varphi \geq \varphi$ car $\varphi > 0$. Donc $\boxed{\varphi \text{ est le plus petit élément de } H}$.

(c) Soit $x \in H$. On considère

$$A = \left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \varphi^k \leqslant x\right\}.$$

Comme $\varphi = \min H$, $1 \in A$ et donc A est une partie non vide de $\mathbb{N}$. De plus

$$\varphi^k \leqslant x \Leftrightarrow k \leqslant \frac{\ln x}{\ln \varphi},$$

car $\ln \varphi > 0$. Donc A est majoré et admet un plus grand élément p. Comme $p + 1 \notin A$, on a $x < \varphi^{p+1}$. Donc

$$\boxed{\forall x \in H,\ \exists!\, p \in \mathbb{N}^*\ \varphi^p \leqslant x < \varphi^{p+1}}.$$

(d) On montre le résultat par double inclusion.

$\boxed{\supset}$ $(G, \times)$ est un groupe et $\varphi \in G$. Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^p \in G$.
De plus, comme $\varphi > 1$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^p \geq \varphi > 1$.
Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^p \in H$, *i.e.* $\{\varphi^p \mid p \in \mathbb{N}^*\} \subset H$.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in H$. D'après la question précédente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^p \leqslant x < \varphi^{p+1}$.
On pose alors $y = \dfrac{x}{\varphi^p}$. On a $1 \leqslant y < \varphi$.
Comme $x \in G$, $\varphi \in G$ et $(G, \times)$ est un groupe, on en déduit $y \in G$.
Supposons $y > 1$. On a alors $y \in H$ et $y < \varphi$, ce qui est impossible.
Donc nécessairement $y = 1$ et $x = \varphi^p$. Ainsi $H \subset \{\varphi^p \mid p \in \mathbb{N}^*\}$.

Finalement, $\boxed{H = \{\varphi^p \mid p \in \mathbb{N}^*\}}$.

7. Commençons par vérifier que Θ est bien défini. Comme $\varphi \in G$ et $(G, \times)$ est un groupe, $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\varphi^p \in G$. De plus, comme $-1 \in G$, $\forall (\varepsilon, p) \in \mathbb{U}_2 \times \mathbb{Z}$, $\varepsilon\varphi^p \in G$. Donc Θ est bien défini. On doit ensuite montrer que Θ est un morphisme de groupes, injectif et surjectif.

- Commençons par expliciter la loi du groupe $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{Z}$. Il s'agit du produit cartésien des groupes $(\mathbb{U}_2, \times)$ et $(\mathbb{Z}, +)$. Donc la loi $\star$ du groupe $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{Z}$ est définie par

$$\forall ((\varepsilon, p), (\varepsilon', p')) \in \mathbb{U}_2 \times \mathbb{Z},\ (\varepsilon, p) \star (\varepsilon', p') = (\varepsilon\varepsilon', p + p').$$

Puis

$$\begin{aligned}\Theta((\varepsilon, p) \star (\varepsilon', p')) &= \Theta(\varepsilon\varepsilon', p + p') \\ &= \varepsilon\varepsilon'\varphi^{p+p'} \\ &= (\varepsilon\varphi^p) \times (\varepsilon'\varphi^{p'}) \\ &= \Theta(\varepsilon, p) \times \Theta(\varepsilon', p').\end{aligned}$$

Donc Θ est un morphisme de groupes.

- Montrons que $\operatorname{Ker}\Theta = \{(1, 0)\}$. Soit $(\varepsilon, p) \in \mathbb{U}_2 \times \mathbb{Z}$ tel que $\Theta(\varepsilon, p) = 1$, *i.e.* $\varepsilon\varphi^p = 1$.
Comme $\varphi > 0$, $\varepsilon\varphi^p$ a même signe que ε. Donc $\varepsilon = 1$. Ainsi $\varphi^p = 1$.
Comme $\varphi \neq 1$, on en déduit $p \ln \varphi = 0$, puis $p = 0$. Donc $(\varepsilon, p) = (1, 0)$.
Cela montre que $\operatorname{Ker}\Theta \subset \{(1, 0)\}$.
Comme $(1, 0)$ est l'élément neutre de $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{Z}$, l'inclusion réciproque est vérifiée.
Par conséquent $\operatorname{Ker}\Theta = \{(1, 0)\}$ et Θ est injectif.

- Montrons enfin que Θ est surjectif. Soit $x \in G$. On distingue alors plusieurs cas
  - Si $x > 1$, alors $x \in H$ et, d'après la question précédente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \varphi^p = \Theta(1, p)$.
  - Si $0 < x < 1$, alors $x^{-1} \in H$ et il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^{-1} = \varphi^p$, d'où $x = \varphi^{-p} = \Theta(1, -p)$.
  - Si $x = 1$, alors $x = \Theta(1, 0)$.

  Cela prouve que $\forall x \in G$, $x > 0 \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z}\ x = \Theta(1, p)$. Si $x < 0$, alors $-x \in G$ et $-x > 0$.
  Donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $-x = \varphi^p$, d'où $x = -\varphi^p = \Theta(-1, p)$.
  Comme $0 \notin G$, tous les cas possibles ont été traités. Donc Θ est surjectif.

Donc $\boxed{\Theta \text{ est un isomorphisme de groupes}}$.