Chapitre E1

Dénombrement

1 Ensembles et parties finis

Lemme E1.1

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. S'il existe une bijection entre $[\![1, m]\!]$ et $[\![1, n]\!]$, alors $m = n$.

Définition E1.2

On dit que l'ensemble E est un **ensemble fini** s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection entre E et $[\![1, n]\!]$.
D'après le lemme ci-dessus, si un tel entier existe, il est unique ; on l'appelle **cardinal** de E, noté $\operatorname{Card} E$ ou $|E|$ (anciennement $\#E$). Par extension, l'ensemble vide a un cardinal nul.
Deux ensembles de même cardinal sont dits **équipotents**.

Proposition E1.3

Soit E un ensemble fini et F une partie de E. Alors

(i) $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$;

(ii) $\operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E \Leftrightarrow F = E$.

Théorème E1.4 (Parties finies de $\mathbb{N}$)

(i) Une partie de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée.

(ii) Si P est une partie non vide de $\mathbb{N}$, de cardinal n, alors il existe une unique bijection strictement croissante de $[\![1, n]\!]$ dans P.

Proposition E1.5

Soit $f : E \to F$ avec E et F ensembles finis. Alors

(i) $\operatorname{Card}(f(E)) \leqslant \operatorname{Card} E$;

(ii) $\operatorname{Card}(f(E)) = \operatorname{Card} E \Leftrightarrow f$ est injective.

Théorème E1.6

Soit $f : E \to F$ avec E et F deux ensembles finis de même cardinal. Alors on a équivalence entre

(i) f est injective,

(ii) f est surjective,

(iii) f est bijective.

Opérations

Proposition E1.7

Soient E et F deux ensembles finis.

(i) $E \cup F$ est fini et $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}\, E + \mathrm{Card}\, F - \mathrm{Card}(E \cap F)$.

(ii) $E \times F$ est fini et $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}\, E \times \mathrm{Card}\, F$.

Remarque. Si E et F sont finis et disjoints, alors $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}\, E + \mathrm{Card}\, F$. Dans ce cas on note $E \cup F = E \sqcup F$.

Proposition E1.8 (Nombre d'applications)

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. Alors

$$\mathrm{Card}(\mathscr{F}(E, F)) = n^p.$$

Proposition E1.9 (Nombres de parties de E)

Soient E un ensemble fini de cardinal p. Alors

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^p.$$

2 Dénombrement

2.1 Principes

Théorème E1.10 (Lemme des bergers)

Soit $f : E \to F$ une application et $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $y \in F$, $f^{-1}(\{y\})$ est fini de cardinal m. Alors

(i) E est fini si et seulement si F est fini.

(ii) $\operatorname{Card} E = m \operatorname{Card} F$.

2.2 p-listes

Définition E1.11

Étant donnés un ensemble E et $p \in \mathbb{N}$, on appelle **p-liste** d'éléments de E tout p-uplet d'éléments de E, c'est-à-dire tout élément de E^p.

Remarque. L'ordre des éléments compte et il peut y avoir des répétitions.

Proposition E1.12

Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$. Le nombre de p-listes d'éléments de E est n^p.

2.3 p-arrangements

Définition E1.13

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$, on appelle **p-arrangement** de E toute p-liste d'éléments distincts de E.

Remarque. L'ordre des éléments compte et il ne peut pas y avoir de répétitions.

Proposition E1.14

Avec les mêmes notations et si $n \leqslant p$,

(i) le nombre de p-arrangements de E est $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$;

(ii) Le nombre d'injections de $[\![1, p]\!]$ dans E est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Définition E1.15

Soit E un ensemble fini de cardinal n. On appelle **permutation** de E toute bijection de E dans lui-même.

Proposition E1.16

Avec les mêmes notations, il existe $n!$ permutations de E.

Remarque. Il y a une correspondance entre les permutations et les n-arrangements de E.

2.4 p-combinaisons

Définition E1.17

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$, on appelle **p-combinaison** de E toute partie de cardinal p de E.

Remarque. L'ordre des éléments ne compte pas et il ne peut pas y avoir de répétitions.

Proposition E1.18

Avec les mêmes notations,

(i) le nombre de p-combinaisons de E est $\binom{n}{p}$, à savoir $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \leqslant n$;

(ii) si $p \leqslant n$, alors le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est $\binom{n}{p}$.

Proposition E1.19

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(i) $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$;

(iii) $\forall p \in [\![0, n-1]\!]$, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ (formule de Pascal) ;

(iv) $\forall x, y \in \mathbb{C}$, $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ (formule du binôme de Newton).