

TD E1. Dénombrément

Exercice E1.1

Soit A, B, C trois parties d'un ensemble fini E . Montrer que

$$\begin{aligned}\text{Card}(A \cup B \cup C) &= \text{Card } A + \text{Card } B + \text{Card } C \\ &\quad - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}(A \cap C) \\ &\quad + \text{Card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

  On pourra tenter de généraliser cette formule à la réunion de n parties de E .

Exercice E1.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que

1. $x + y + z = n$,
2. $x + y + z \leq n$.

Exercice E1.3

Combien peut-on trouver d'anagrammes au mot

1. SIX
2. MATHS
3. CHIMIE
4. VINGTHUIT
5. ANAGRAMME
6. QUATRECENTQUATREVINGTSEIZE

Exercice E1.4

On tire successivement et avec remise 5 boules d'une urne qui en contient 9, numérotées de 1 à 9.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Dénombrer l'ensemble des tirages contenant
 - (a) au moins une fois la boule 9 ;
 - (b) exactement deux fois la boule 2 ;
 - (c) trois fois la boule 3 et une fois la boule 1.
3. Dénombrer l'ensemble des tirages tels que
 - (a) le 2^e tirage ait donné la boule 1 ;
 - (b) La boule 1 ait été tirée pour la deuxième fois lors du 3^e tirage

Exercice E1.5

On tire 3 cartes au hasard d'un jeu de 52 cartes classique (13 valeurs, 4 couleurs).

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Dénombrer l'ensemble des tirages contenant
 - (a) trois cartes de même valeur ;
 - (b) exactement deux cartes de la même couleur ;
 - (c) deux ou trois cartes de la même couleur ;
 - (d) au moins un trèfle ou un valet.


Exercice E1.6

- On lance trois fois de suite un dé classique. Combien y a-t-il de tirages donnant des résultats classés
1. dans un ordre strictement croissant ?
 2. dans un ordre croissant (au sens large) ?

Exercice E1.7

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ de parties deux à deux disjointes vérifiant $A \cup B \cup C = E$.

Exercice E1.8

Soit F un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble de cardinal $n + 1$. Dénombrer les surjections de E dans F .

Exercice E1.9

Pour gagner du temps, le Père Noël a choisi de distribuer des cadeaux identiques à tout le monde cette année. En survolant un petit village de 20 maisons, il jette 30 cadeaux qui atterrissent tous aléatoirement dans une des 20 maisons.

1. Combien y a-t-il de répartitions possibles des 30 cadeaux ?
2. Combien y a-t-il de répartitions telles que tout le monde reçoive au moins un cadeau ? Qu'au moins une famille ne reçoive rien ?
3. Mêmes questions avec p maisons et n cadeaux.

Exercice E1.10

La MPSI et la MP2I se lancent un défi sportif. Les deux classes comptent chacune n volontaires parmi lesquels il s'agit de constituer une équipe de p concurrents, dont 1 capitaine.

1. La MPSI choisit tout d'abord les p concurrents qui élisent ensuite un capitaine parmi eux. Combien d'équipes peuvent-elles être ainsi formées ?
2. La MP2I choisit tout d'abord son capitaine parmi les volontaires puis ce dernier désigne les autres membres de son équipe. Combien d'équipes peuvent-elles être ainsi formées ?
3. Quelle formule avons-nous démontrée ?

Exercice E1.11

Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal np . Déterminer de deux manières différentes le nombre de partitions de E en n parties de p éléments chacune.

Exercice E1.12

En dénombrant un certain ensemble de deux manières différentes, démontrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$,

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$