

# TD E1. Dénombrement

## Exercice E1.1

Soit  $A, B, C$  trois parties d'un ensemble fini  $E$ . Montrer que

$$\begin{aligned}\text{Card}(A \cup B \cup C) &= \text{Card } A + \text{Card } B + \text{Card } C \\ &\quad - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}(A \cap C) \\ &\quad + \text{Card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

  On pourra tenter de généraliser cette formule à la réunion de  $n$  parties de  $E$ .

## Exercice E1.2

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Combien y a-t-il de triplets  $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$  tels que

1.  $x + y + z = n$ ,
2.  $x + y + z \leq n$ .

## Exercice E1.3

Combien peut-on trouver d'anagrammes au mot

1. SIX
2. MATHS
3. CHIMIE
4. VINGTHUIT
5. ANAGRAMME
6. QUATRECENTQUATREVINGTSEIZE

## Exercice E1.4

On tire successivement et avec remise 5 boules d'une urne qui en contient 9, numérotées de 1 à 9.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Dénombrer l'ensemble des tirages contenant
  - (a) au moins une fois la boule 9 ;
  - (b) exactement deux fois la boule 2 ;
  - (c) trois fois la boule 3 et une fois la boule 1.
3. Dénombrer l'ensemble des tirages tels que
  - (a) le 2<sup>e</sup> tirage ait donné la boule 1 ;
  - (b) La boule 1 ait été tirée pour la deuxième fois lors du 3<sup>e</sup> tirage

## Exercice E1.5

On tire 3 cartes au hasard d'un jeu de 52 cartes classique (13 valeurs, 4 couleurs).

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Dénombrer l'ensemble des tirages contenant
  - (a) trois cartes de même valeur ;
  - (b) exactement deux cartes de la même couleur ;
  - (c) deux ou trois cartes de la même couleur ;
  - (d) au moins un trèfle ou un valet.

**Exercice E1.6**

On lance trois fois de suite un dé classique. Combien y a-t-il de tirages donnant des résultats classés

1. dans un ordre strictement croissant ?
2. dans un ordre croissant (au sens large) ?

**Exercice E1.7**  $\mathbb{C} \mathbb{M}$ 

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Déterminer le nombre de couples  $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$  tels que  $A \subset B$ .
2. Déterminer le nombre de couples  $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$  tels que  $A \cap B = \emptyset$ .
3. Déterminer le nombre de triplets  $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$  de parties deux à deux disjointes vérifiant  $A \cup B \cup C = E$ .

**Exercice E1.8**

Soit  $F$  un ensemble fini de cardinal  $n \in \mathbb{N}$  et  $E$  un ensemble de cardinal  $n + 1$ . Dénombrer les surjections de  $E$  dans  $F$

**Exercice E1.9**

Pour gagner du temps, le Père Noël a choisi de distribuer des cadeaux identiques à tout le monde cette année. En survolant un petit village de 20 maisons, il jette 30 cadeaux qui atterrissent tous aléatoirement dans une des 20 maisons.

1. Combien y a-t-il de répartitions possibles des 30 cadeaux ?
2. Combien y a-t-il de répartitions telles que tout le monde reçoive au moins un cadeau ? Qu'au moins une famille ne reçoive rien ?
3. Mêmes questions avec  $p$  maisons et  $n$  cadeaux.

**Exercice E1.10**

La MPSI et la MP2I se lancent un défi sportif. Les deux classes comptent chacune  $n$  volontaires parmi lesquels il s'agit de constituer une équipe de  $p$  concurrents, dont 1 capitaine.

1. La MPSI choisit tout d'abord les  $p$  concurrents qui élisent ensuite un capitaine parmi eux. Combien d'équipes peuvent-elles être ainsi formées ?
2. La MP2I choisit tout d'abord son capitaine parmi les volontaires puis ce dernier désigne les autres membres de son équipe. Combien d'équipes peuvent-elles être ainsi formées ?
3. Quelle formule avons-nous démontrée ?

**Exercice E1.11**

Soit  $p, n \in \mathbb{N}^*$  et  $E$  un ensemble de cardinal  $np$ . Déterminer de deux manières différentes le nombre de partitions de  $E$  en  $n$  parties de  $p$  éléments chacune.

**Exercice E1.12**

En démontrant un certain ensemble de deux manières différentes, démontrer que pour tous  $n, p \in \mathbb{N}$  tels que  $p \leq n$ ,

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$