Programme de colle 15 : du 19/01 au 23/01

Dérivabilité

- Dérivabilité, à droite à gauche, équation de la tangente, DL1.
- Calcul de dérivées et dérivées successives, classe $\mathcal{C}^k$, formule de Leibniz.
- Théorèmes de Rolle, des accroissements finis (égalité et inégalité), limite de la dérivée.

Exercices abordés dans le TD B4 : 2, 3, 4, 5, 6, 9, 14, 16, 22, 25, 26, 27, 28, 30, 32.

Arithmétique des entiers

- Divisibilité, diviseurs, multiples, propriétés.
- Relation de congruence modulo un entier, propriétés, résolution d'équations.
- Division euclidienne.
- PGCD, PPCM (au sens de $\leqslant$), premières propriétés.
- Algorithme d'Euclide, algorithme d'Euclide étendu, identité de Bézout.
- Caractérisation du PPCM et du PGCD par la relation de divisibilité.
- Nombres premiers entre eux, caractérisation par le théorème de Bézout, propriétés.
- Théorème de Gauß.
- Relation entre PGCD et PPCM.
- Extension des définitions au cas d'une famille finie de nombres entiers.
- Nombres premiers entre eux dans leur ensemble ou deux à deux. Propriétés de Bézout.
- Nombres premiers, cardinal infini.
- Petit théorème de Fermat.
- Décomposition primaire : existence et unicité d'une décomposition en produit de nombres premiers.
- Valuations p-adiques, formules, lien avec la divisibilité, calcul de PGCD, PPCM.
- Méthodes de résolution : équations modulaires du type $ax \equiv b\ [m]$, petits systèmes de congruences, équations diophantiennes du type $ax + by = c$.

Exercices abordés dans le TD C3 : 3, 11, 13, 19, 31, 41, 43, 59, 67.

Questions de cours

➢ Dérivées successives de $x \mapsto \ln(1+x)$ ou de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

➢ Étude de (u_n) définie par $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n}$ (intervalle stable, point fixe et la convergence par IAF).

➢ Quel est le dernier chiffre de 7^{7^7} ? (*(indication éventuelle : montrer que $7^4 \equiv 1\ [10]$)*.

➢ Énoncé et démonstration du théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

➢ Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors $(ka) \wedge (kb) = k(a \wedge b)$.

➢ Énoncé et démonstration du petit théorème de Fermat (au moins la première assertion).

Remarques

- Les fonctions à valeurs complexes ont été évoquées.
- L'arithmétique est développée purement dans $\mathbb{Z}$ sans théorie sur les anneaux (euclidiens/factoriels/principaux).
- En plus du savoir-faire, il est important de savoir énoncer les définitions des notions ou les théorèmes employés.

Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.

Bonne semaine de colle !