Devoir surveillé n° 4

Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

Notation. Dans la seconde partie du problème, étant donnée une fonction réelle u, définie sur un domaine D, à valeurs dans une partie majorée de $\mathbb{R}$, on note

$$\sup_{x \in D} u(x) = \sup\left(\{u(x) \mid x \in D\}\right) = \sup\left(u(D)\right).$$

A Égalité de Taylor-Lagrange

Dans cette partie, on considère deux réels a et b tels que $a < b$, $n \in \mathbb{N}$ et une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. On suppose de plus que $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$ et on note $f^{(n+1)}$ sa dérivée sur cet intervalle.

L'objectif de cette partie est de démontrer l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Ce résultat est l'égalité de Taylor-Lagrange.

1. À quel théorème correspond l'égalité de Taylor-Lagrange lorsque $n = 0$?

   On revient au cas général. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère $g_\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [a, b]\,,\; g_\lambda(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{\lambda}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que g_λ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et calculer $g'_\lambda(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.
3. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et $c \in]a, b[$ tels que $g_\mu(a) = 0$ et $g'_\mu(c) = 0$.
4. Conclure.

B Inégalité de Kolmogorov

Dans cette partie, on considère $a \in \mathbb{R}$ et une fonction $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $]a, +\infty[$ et on pose

$$M_0 = \sup_{x \in]a,+\infty[} |f(x)| \text{ et } M_2 = \sup_{x \in]a,+\infty[} |f''(x)|.$$

L'objectif de cette partie est de démontrer que f' est bornée sur $]a, +\infty[$ et de montrer une inégalité de Kolmogorov

$$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}, \quad \text{avec} \quad M_1 = \sup_{x \in]a,+\infty[} |f'(x)|.$$

5. Soit $x_0 \in]a, +\infty[$ et $h > 0$. On pose $x = x_0 + h$.
   (a) Montrer qu'il existe $c \in]x_0, x[$ tel que
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(c)\frac{h^2}{2}.$$
   (b) En déduire que
$$|f'(x_0)| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$
6. En déduire que f' est bornée sur $]a, +\infty[$. On pose alors $M_1 = \sup_{x\in]a,+\infty[} |f'(x)|$.
7. Soit $A, B > 0$. Étudier les variations de la fonction $\varphi : h \mapsto \dfrac{2A}{h} + \dfrac{hB}{2}$ sur $]0, +\infty[$.
8. Conclure.

Problème 2

La chocolaterie *Diophantaisie* fabrique des tablettes constituées de carreaux, des petits carrés de chocolat identiques, assemblés pour former de grandes plaques carrées. Elle souhaite proposer deux formats de plaques, un format raisonnable et un format plus gourmand, contenant *trois fois plus de carreaux* que le plus petit.

Un ingénieur de la firme montre que cette exigence est mathématiquement irréalisable : si les deux formats de plaques sont constitués de petits carreaux identiques, le rapport de leurs côtés doit être $\sqrt{3}$, ce qui est impossible puisque $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Il observe toutefois qu'en introduisant une petite tolérance (un carreau de plus ou de moins, ce qui est sans impact perceptible pour le consommateur), le problème devient soluble. Les dirigeants acceptent alors de produire des plaques contenant respectivement n^2 et m^2 carreaux, vérifiant
$$n^2 = 3m^2 \pm 1.$$

A Friandise

1. Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. *(on pourra éventuellement admettre ce résultat pour la suite)*
2. En considérant les congruences modulo 4, montrer que l'équation $n^2 = 3m^2 - 1$ n'a aucune solution entière.

B Gourmandise

On considère l'ensemble noté $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$, défini par
$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2,\ x = a + b\sqrt{3}\right\}.$$

3. Montrer que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ est un anneau, muni des lois $+$ et $\times$ (addition et multiplication) usuelles.
4. Soit $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{3}$.
5. Soit $x = a + b\sqrt{3}$, avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. L'unicité du couple (a, b) nous permet de définir $\overline{x} = a - b\sqrt{3}$ et $N(x) = x\overline{x}$.

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right],\ N(x) \in \mathbb{Z}$.

(b) Montrer que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right],\ \overline{x_1 \times x_2} = \overline{x_1} \times \overline{x_2}$.

(c) En déduire que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right],\ N(x_1 x_2) = N(x_1)\, N(x_2)$.

On note $G = \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]^{\times}$ le groupe des éléments de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$, inversibles pour la loi $\times$.

6. (a) Soit $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Montrer que $x \in G$ si et seulement si $N(x) = 1$.

   Indication. Pour l'implication directe, on pourra commencer par montrer que si $x \in G$, alors $N(x) = \pm 1$.

   (b) $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ est-il un corps ?

On pose $x_0 = 2 + \sqrt{3}$ et $H = G \cap \left]1, +\infty\right[$.

7. (a) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On pose $x = a + b\sqrt{3}$. Montrer que si $x \in H$, alors $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 1$.

   Indication. On pourra montrer tout d'abord $0 < \overline{x} < 1 < x$, puis $b \geqslant 1$ et enfin $a \geqslant 2$.

   (b) Montrer que x_0 est le plus petit élément de H.

   (c) Soit $x \in H$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_0^p \leqslant x < x_0^{p+1}$.

   Indication. On pourra considérer l'ensemble $A = \left\{k \in \mathbb{N}^* \mid x_0^k \leqslant x\right\}$.

   (d) Montrer que $H = \{x_0^p \mid p \in \mathbb{N}^*\}$.

   Indication. Pour l'inclusion directe, on pourra considérer un élément $x \in H$, poser $y = x \times x_0^{-p}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ défini par la question précédente et montrez qu'on a nécessairement $y = 1$.

8. Montrer que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\times} & \longrightarrow & G \\ (p, \varepsilon) & \longmapsto & \varepsilon x_0^p \end{array}$$

   est un isomorphisme de groupes.

C Dessert

On cherche les solutions $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ de l'équation

$$(E)\ :\ n^2 - 3m^2 = 1.$$

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$.

9. Montrer que (n, m) est solution de (E) si et seulement si $n + m\sqrt{3} \in H$.

10. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note a_p et b_p les éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que

$$x_0^p = a_p + b_p\sqrt{3}.$$

   Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer a_{p+1} et b_{p+1} en fonction de a_p et b_p.

11. Déterminer toutes les solutions de (E) vérifiant $10 \leqslant m \leqslant 100$. En déduire le nombre de petits carrés dans les grandes plaques.