La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

L'objectif de ce problème est de déterminer les triplets pythagoriciens et d'en déduire le grand théorème de Fermat pour $n = 4$.

A Préliminaire

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout nombre premier p, on note $\nu_p(n)$ la valuation p-adique de n.

1. Soit $a, b, k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $a^k \mid b^k$, alors $a \mid b$.
2. Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\left(\exists m \in \mathbb{N}^*\ n = m^k\right) \Leftrightarrow (\forall p \in \mathscr{P},\ \nu_p(n) \equiv 0\ [k])\,.$$
3. Soit $m, k, a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \wedge b = 1$ et $ab = m^k$. Montrer qu'il existe $c, d \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = c^k$ et $b = d^k$.

B Triplets pythagoriciens

On appelle **triplet pythagoricien** tout triplet $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$.
Un triplet pythagoricien (a, b, c) est dit **primitif** si $a \wedge b = 1$.

Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien.

4. (a) Montrer que $a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c$.
   (b) En déduire qu'il existe $\delta \in \mathbb{N}^*$ et un triplet pythagoricien primitif (a', b', c') tel que $a = \delta a'$, $b = \delta b'$ et $c = \delta c'$.

Dans la suite, on suppose que (a, b, c) est un triplet pythagoricien primitif.

5. En considérant les congruences de a^2, b^2 et c^2 modulo 4, montrer que a et b n'ont pas la même parité et que c est impair.

On dit qu'un triplet pythagoricien primitif (a, b, c) est **rangé** si b est pair et a et c sont impairs. On suppose maintenant que (a, b, c) est un triplet pythagoricien primitif et rangé.

6. (a) Montrer que $(c - a) \wedge (c + a) = 2$.
   (b) Montrer qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que
$$p^2 = \frac{c + a}{2} \qquad \text{et} \qquad q^2 = \frac{c - a}{2}.$$
   En déduire que
$$a = p^2 - q^2\ ,\ b = 2pq \text{ et } c = p^2 + q^2.$$

   (c) Montrer que p et q sont premiers entre eux, n'ont pas la même parité et que $q < p$.

7. Réciproquement, soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que p et q n'ont pas la même parité et que $q < p$. Montrer que $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$ est un triplet pythagoricien primitif rangé.

C Grand théorème de Fermat pour $n = 4$

On considère l'équation diophantienne $(E) : a^4 - b^4 = c^2$. On dit qu'une solution $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ de (E) est **primitive** si $a \wedge b = 1$.

8. Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ une solution de (E). Montrer que l'équation (E) admet une solution primitive (a', b', c') telle que $a' \leqslant a$.

On suppose dorénavant que (a, b, c) est une solution primitive de (E).

9. Montrer que a est impair.
10. On suppose que b est impair. En considérant le triplet pythagoricien (b^2, c, a^2), puis en calculant b^2a^2, montrer que l'équation (E) admet une solution primitive $(a', b', c') \in (\mathbb{N}^*)^3$ telle que $a' < a$.
11. On suppose que b est pair.
    (a) Montrer qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que p est impair, q est pair, $b^2 = 2pq$ et $a^2 = p^2 + q^2$.
    (b) Montrer qu'il existe $r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que $a^2 = r^4 + 4s^4$, puis qu'il existe $t, u \in \mathbb{N}^*$ tels que $r^2 = t^4 - u^4$. En déduire que l'équation (E) admet une solution primitive $(a', b', c') \in (\mathbb{N}^*)^3$ telle que $a' < a$.
12. En déduire que l'équation (E) n'admet aucune solution $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$.
13. En déduire le grand théorème de Fermat pour $n = 4$, *i.e.* que l'équation $a^4 + b^4 = c^4$ n'admet aucune solution $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$.