Problème 1

1. Pour $n = 0$, l'égalité de Taylor-Lagrange montre que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$. C'est $\boxed{\text{l'égalité des accroissements finis}}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, donc pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}$ est continue sur $[a, b]$. De plus, pour tout $k \in [\![0, n + 1]\!]$, la fonction $x \mapsto (b - x)^k$ est continue. Donc g_λ est continue sur $[a, b]$ en tant que somme et produit de fonctions continues.
   - D'autre part, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, donc pour tout $k \in [\![0, n - 1]\!]$, $f^{(k)}$ est dérivable sur $[a, b]$. De plus, par hypothèse, $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$. Enfin, pour tout $k \in [\![0, n + 1]\!]$, la fonction $x \mapsto (b - x)^k$ est dérivable. Donc g_λ est dérivable sur $]a, b[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables.

   $$\boxed{g_\lambda \text{ est continue sur } [a, b] \text{ et dérivable sur }]a, b[.}$$

   Soit $x \in]a, b[$. On a (en sortant le premier terme de la somme)

   $$g'_\lambda(x) = -f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b - x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k - 1)!}(b - x)^{k-1} \right) - \frac{\lambda}{n!}(b - x)^n.$$

   On reconnaît une somme télescopique. Ainsi

   $$g'_\lambda(x) = -f'(x) - \left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b - x)^n - f'(x) \right) - \frac{\lambda}{n!}(b - x)^n$$

   $$\boxed{g'_\lambda(x) = -\frac{\lambda + f^{(n+1)}(x)}{n!}(b - x)^n.}$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $g_\lambda(a) = A + \lambda B$, avec $A, B \in \mathbb{R}$ qui ne dépendent pas de λ. Plus explicitement,

   $$A = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k \qquad \text{et} \qquad B = \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

   Comme $a < b$, $B \neq 0$ et donc $g_\lambda(a) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{A}{B}$. Autrement dit, l'équation $g_\lambda(a) = 0$ d'inconnue λ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

   $$\boxed{\text{Il existe } \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } g_\mu(a) = 0.}$$

   D'après ce qui précède, $g_\mu(a) = 0$. Or on a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $g_\lambda(b) = 0$. En particulier $g_\mu(b) = 0$. Comme g_μ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'_\mu(c) = 0$, d'après le théorème de Rolle.

   $$\boxed{\text{Il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } g'_\mu(c) = 0.}$$

4. D'après les questions précédentes, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et $c \in]a, b[$ tels que $g_\mu(a) = 0$ et $g'_\mu(c) = 0$. D'après l'expression de g'_μ, on en déduit

$$0 = g'_\mu(c) = -\frac{\mu + f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n.$$

Comme $b - c \neq 0$, on en déduit $\mu = -f^{(n+1)}(c)$ et donc

$$0 = g_\mu(a) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

$$\boxed{\text{Il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}.$$

5. (a) Soit $x_0 \in]a, +\infty[$ et $h > 0$. On pose $x = x_0 + h$. Par hypothèse, f est $\mathcal{C}^2$ sur $]a, +\infty[$. Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $[x_0, x]$ et f' est dérivable sur $]x_0, x[$. D'après l'égalité de Taylor-Lagrange, il existe alors $c \in]x_0, x[$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2.$$

$$\boxed{\text{Il existe } c \in]x_0, x[\text{ tel que } f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(c)\frac{h^2}{2}}.$$

(b) D'après ce qui précède,

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{h} - \frac{f''(c)h}{2}.$$

Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|f'(x_0)| \leqslant \frac{|f(x) - f(x_0)|}{h} + \frac{|f''(c)|h}{2} \leqslant \frac{|f(x)| + |f(x_0)|}{h} + \frac{|f''(c)|h}{2}.$$

Par définition de M_0 et M_2, on a $|f(x)| \leqslant M_0$, $|f(x_0)| \leqslant M_0$ et $|f''(c)| \leqslant M_2$.

$$\boxed{|f'(x_0)| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.}$$

6. On a montré

$$\forall x_0 \in]a, +\infty[,\ \forall h > 0,\ |f'(x_0)| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

En particulier, pour $h = 1$,

$$\forall x_0 \in]a, +\infty[,\ |f'(x_0)| \leqslant 2M_0 + \frac{M_2}{2}.$$

$$\boxed{f' \text{ est bornée sur }]a, +\infty[}.$$

7. Tout d'abord, φ est une fraction rationnelle, donc φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall h > 0,\ \varphi'(h) = -\frac{2A}{h^2} + \frac{B}{2} = \frac{Bh^2 - 4A}{2h^2}.$$

Comme $B > 0$ et $A > 0$,

$$\forall h > 0,\ \varphi'(h) = 0 \Leftrightarrow h = 2\sqrt{\frac{A}{B}}.$$

On a alors le tableau de variations suivant.

h	0		$2\sqrt{\frac{A}{B}}$		$+\infty$
$\varphi'(h)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$\varphi(h)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{AB}$	$\nearrow$	$+\infty$

8. Soit $h > 0$. On a montré
$$\forall x_0 \in \,]a, +\infty[\,,\ |f'(x_0)| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$
On en déduit que $\dfrac{2M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$ est un majorant de $\big\{|f'(x)| \mid x \in \,]a, +\infty[\big\}$. Donc
$$\forall h > 0,\ M_1 \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$
On distingue plusieurs cas.
   - Si $M_0 = 0$, alors f est nulle et $M_1 = 0$.
   - Si $M_2 = 0$, alors $\forall h > 0$, $M_1 \leqslant \dfrac{2M_0}{h}$, d'où $M_1 = 0$.
   - Si $M_0 > 0$ et $M_2 > 0$, pour $h = 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$, on obtient $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$.
$$\boxed{M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}}.$$

Problème 2

1. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\sqrt{3}$ est rationnel. Il existe alors $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$ et $a \wedge b = 1$. On en déduit $a^2 = 3b^2$. Ainsi $3 \mid a^2$, et donc $3 \mid a$ car 3 est un nombre premier. Il existe alors $a' \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = 3a'$, ce qui implique $3a'^2 = b^2$. De la même manière, on en déduit $3 \mid b^2$ puis $3 \mid b$. On a alors $3 \mid a$ et $3 \mid b$, ce qui contredit le fait que a et b sont premiers entre eux. Donc
$$\boxed{\sqrt{3} \text{ est irrationnel}}.$$

2. Soit $a \in \mathbb{Z}$ et r le reste de la division euclidienne de a par 4. On a alors $a \equiv r\ [4]$ et $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. On en déduit $a^2 \equiv r^2\ [4]$. Et comme $0^2 \equiv 2^2 \equiv 0\ [4]$ et $1^2 \equiv 3^2 \equiv 1\ [4]$, a^2 est congru à 0 ou à 1 modulo 4.
$$\boxed{\text{Tout carré de nombre entier est congru à 0 ou à 1 modulo 4}}.$$
Supposons que $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $n^2 = 3m^2 - 1$.
   - Si $m^2 \equiv 0\ [4]$, alors $n^2 \equiv -1 \equiv 3\ [4]$.
   - Si $m^2 \equiv 1\ [4]$, alors $n^2 \equiv 2\ [4]$.

   Dans tous les cas, cela contredit le résultat précédent. Donc
$$\boxed{\text{l'équation } n^2 = 3m^2 - 1 \text{ n'a aucune solution entière}}.$$

3. Montrons que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

- Par définition de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$, on a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] \subset \mathbb{R}$.
- On a $0 = a + b\sqrt{3}$ pour $(a, b) = (0, 0)$ et $1 = a + b\sqrt{3}$ pour $(a, b) = (1, 0)$. Donc $0, 1 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$.
- Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{3}$ et $x_2 = a_2 + b_2\sqrt{3}$. On a alors

$$x_1 + x_2 = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{3},$$
$$x_1 \times x_2 = \underbrace{(a_1a_2 + 3b_1b_2)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(a_1b_2 + a_2b_1)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{3}.$$

  Ainsi $x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ et $x_1 \times x_2 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Donc $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ est stable par $+$ et $\times$.
- Soit $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\sqrt{3}$. On a alors $-x = (-a) + (-b)\sqrt{3}$. Comme $-a \in \mathbb{Z}$ et $-b \in \mathbb{Z}$, $-x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Donc $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ est stable par passage à l'opposé.

$$\boxed{\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] \text{ est un sous-anneau de } (\mathbb{R}, +, \times).}$$

4. Soit $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. L'existence de $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\sqrt{3}$ découle de la définition de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Montrons l'unicité du couple (a, b).
   Supposons que $x = a_1 + b_1\sqrt{3} = a_2 + b_2\sqrt{3}$, avec $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$. On a alors, par différence, $a_1 - a_2 = (b_2 - b_1)\sqrt{3}$. Si $b_2 \neq b_1$, alors $\sqrt{3} = \dfrac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1}$. Ainsi $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux. Donc nécessairement $b_1 = b_2$, puis $a_1 = a_2$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right], \ \exists!\,(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } x = a + b\sqrt{3}}.$$

5. (a) Soit $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. On écrit $x = a + b\sqrt{3}$, avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On a

$$N(x) = x\overline{x} = (a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2 \in \mathbb{Z}.$$

   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right], \ N(x) \in \mathbb{Z}}$.

   (b) Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. On écrit $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{3}$ et $x_2 = a_2 + b_2\sqrt{3}$, avec $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$. On a

$$\overline{x_1 \times x_2} = (a_1a_2 + 3b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3},$$
$$\overline{x_1} \times \overline{x_2} = (a_1a_2 + 3b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3}.$$

   Donc $\boxed{\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right], \ \overline{x_1 \times x_2} = \overline{x_1} \times \overline{x_2}}$.

   (c) Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. On a, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} N(x_1x_2) &= x_1x_2 \times \overline{x_1x_2} \\ &= x_1 \times x_2 \times \overline{x_1} \times \overline{x_2} \\ &= (x_1\overline{x_1})(x_2\overline{x_2}), \end{aligned}$$
$$\boxed{N(x_1x_2) = N(x_1)N(x_2)}.$$

6. (a) Soit $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\sqrt{3}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $x \in G$. Il existe alors $y \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ tel que $xy = 1$. On en déduit $N(x)N(y) = N(xy) = N(1) = 1$. Comme $N(x), N(y) \in \mathbb{Z}$, $N(x)$ divise 1. Donc $N(x) = \pm 1$. D'autre part, $N(x) = a^2 - 3b^2$. Or, d'après la question 2, l'équation $n^2 - 3m^2 = -1$ n'admet aucune solution entière. Donc $N(x) \neq -1$ et $N(x) = 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $N(x) = 1$. On a alors $x\overline{x} = 1$. Ainsi, comme $\overline{x} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$, x est inversible dans $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ et $x^{-1} = \overline{x}$. Donc $x \in G$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right],\ \ x \in G \Leftrightarrow N(x) = 1}$.

(b) On a $2 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$, $2 \neq 0$ et $N(2) = 4 \neq 1$. Donc 2 est un élément de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ non nul et non inversible. Donc $\boxed{\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] \text{ n'est pas un corps}}$.

7. (a) Supposons $x = a + b\sqrt{3} \in H$.

- On a en particulier $x \in G$, donc, d'après la question 6a, $N(x) = x\overline{x} = 1$.
- On a aussi $x > 1$, donc $0 < x^{-1} < 1 < x$. Or, d'après ce qui précède, $x^{-1} = \overline{x}$. Donc $0 < \overline{x} < 1 < x$.
- On en déduit $x - \overline{x} > 0$. Or $x - \overline{x} = 2b\sqrt{3}$. On en déduit $b > 0$, puis $b \geqslant 1$ car $b \in \mathbb{Z}$.
- Enfin, comme $\overline{x} > 0$, $a > b\sqrt{3} > b \geqslant 1$. Donc $a > 1$, puis $a \geqslant 2$ car $a \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{Si } x = a + b\sqrt{3} \in H, \text{ alors } a \geqslant 2 \text{ et } b \geqslant 1}.$$

(b) Montrons $x_0 \in H$ et $\forall x \in H$, $x \geqslant x_0$.

- On a $N(x_0) = 2^2 - 3 \times 1^2 = 1$, donc $x_0 \in G$. De plus, $x_0 > 1$, donc $x_0 \in H$.
- Soit $x \in H$. Il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\sqrt{3}$. D'après la question précédente, $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 1$. Donc $x = a + b\sqrt{3} \geqslant 2 + \sqrt{3} = x_0$.

Donc

$$\boxed{x_0 \text{ est le plus petit élément de } H}.$$

(c) Soit $x \in H$. On considère $A = \left\{k \in \mathbb{N}^* \mid x_0^k \leqslant x\right\}$.

- $A \subset \mathbb{N}$ par définition de A.
- Comme $x \in H$ et $x_0 = \min H$, $x_0^1 \leqslant x$. Donc $1 \in A$ et $A \neq \emptyset$.
- Soit $k \in A$. Comme $x_0 \geqslant 2$, on a $k \leqslant 2^k \leqslant x_0^k \leqslant x \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$. Donc A est majoré dans $\mathbb{N}$.

A admet donc un plus grand élément p. En particulier, $p \in A$ et $p + 1 \notin A$, donc $x_0^p \leqslant x < x_0^{p+1}$. Donc

$$\boxed{\forall x \in H,\ \ \exists p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x_0^p \leqslant x < x_0^{p+1}}.$$

(d) On montre le résultat par double inclusion.

$\boxed{\supset}$ $(G, \times)$ est un groupe et $x_0 \in G$. Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $x_0^p \in G$. De plus, comme $x_0 > 1$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $x_0^p \geqslant x_0 > 1$. Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $x_0^p \in H$, et cela montre

$$\{x_0^p \mid p \in \mathbb{N}^*\} \subset H.$$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in H$. D'après la question précédente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_0^p \leqslant x < x_0^{p+1}$. Posons $y = x \times x_0^{-p}$.

- Comme $(G, \times)$ est un groupe et $x, x_0 \in G$, on en déduit $y \in G$.
- Par définition de y, on a $1 \leqslant y < x_0$. En particulier, $y \in G$ et $y < x_0 = \min H$, donc $y \notin H$. Ainsi, d'après la définition de H, $y \leqslant 1$.

Finalement, $y = 1$ et $x = x_0^p$. Donc

$$H \subset \{x_0^p \mid p \in \mathbb{N}^*\}.$$

Finalement, $\boxed{H = \{x_0^p \mid p \in \mathbb{N}^*\}}$.

8. Commençons par vérifier que φ est bien définie. Comme $x_0 \in G$ et $(G, \times)$ est un groupe, $\forall p \in \mathbb{Z}$, $x_0^p \in G$. De plus, comme $-1 \in G$, $\forall (p, \varepsilon) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\times$, $\varepsilon x_0^p \in G$. Donc φ est bien définie. On montre ensuite que φ est un morphisme de groupes, injectif et surjectif.
   - Commençons par expliciter la loi du groupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\times$. Il s'agit du produit cartésien des groupes $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}^\times, \times)$. La loi $\star$ est définie par

   $$\forall ((p, \varepsilon), (p', \varepsilon')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\times)^2,\ (p, \varepsilon) \star (p', \varepsilon') = (p + p', \varepsilon\varepsilon').$$

   On vérifie alors que φ est un morphisme de groupes

   $$\begin{aligned}\varphi((p, \varepsilon) \star (p', \varepsilon')) &= \varphi(p + p', \varepsilon\varepsilon') \\ &= \varepsilon\varepsilon' x_0^{p+p'} \\ &= (\varepsilon x_0^p)(\varepsilon' x_0^{p'}).\end{aligned}$$

   - Montrons que $\operatorname{Ker} \varphi = \{(0, 1)\}$. Soit $(p, \varepsilon) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\times$ tel que $\varphi(p, \varepsilon) = 1$. Alors $\varepsilon x_0^p = 1$. Comme $x_0 > 0$, εx_0^p a le même signe que ε, donc $\varepsilon = 1$. Ainsi $x_0^p = 1$. Comme $x_0 \neq 1$, on en déduit $p = 0$. Donc $(p, \varepsilon) = (0, 1)$, ce qui montre que φ est injective.
   - Montrons enfin que φ est surjective. Soit $x \in G$.
     - ➢ Si $x > 1$, alors $x \in H$ et il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = x_0^p = \varphi(p, 1)$.
     - ➢ Si $0 < x < 1$, alors $x^{-1} \in H$ et il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^{-1} = x_0^p$, d'où $x = \varphi(-p, 1)$.
     - ➢ Si $x = 1$, alors $x = \varphi(0, 1)$.

     Si $x < 0$, alors $-x \in G$ et $-x > 0$, donc $-x = \varphi(p, 1)$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$, d'où $x = \varphi(p, -1)$. Comme $0 \notin G$, tous les cas sont traités. Ainsi φ est surjective.

   Donc $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de groupes}}$.

9. Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On pose $x = n + m\sqrt{3}$. Comme $n > 0$ et $m > 0$, $x > 1$. De plus,

   $$(n, m) \text{ solution de } (E) \ \Leftrightarrow\ N(x) = 1 \ \Leftrightarrow\ x \in G.$$

   Et comme $x > 1$, $x \in G \ \Leftrightarrow\ x \in H$. Donc

   $$\boxed{(n, m) \text{ est solution de } (E) \text{ si et seulement si } n + m\sqrt{3} \in H}.$$

10. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a

    $$a_{p+1} + b_{p+1}\sqrt{3} = x_0^{p+1} = x_0^p x_0 = (a_p + b_p\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = (2a_p + 3b_p) + (a_p + 2b_p)\sqrt{3}.$$

    On en déduit, d'après la question 4,

    $$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \ a_{p+1} = 2a_p + 3b_p \text{ et } b_{p+1} = a_p + 2b_p}.$$

11. D'après ce qui précède, les solutions de (E) sont de la forme $a_p + b_p\sqrt{3}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$. Il suffit donc de déterminer les valeurs de p telles que $10 \leqslant b_p \leqslant 100$. Or, comme $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $a_p > 0$ et $b_p > 0$, la suite $(b_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. Après calculs, on obtient

$$(a_1, b_1) = (2, 1), \quad (a_2, b_2) = (7, 4), \quad (a_3, b_3) = (26, 15), \quad (a_4, b_4) = (97, 56), \quad (a_5, b_5) = (362, 209).$$

Donc les seuls couples $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ solutions de (E) vérifiant $10 \leqslant m \leqslant 100$ sont $(26, 15)$ et $(97, 56)$.

$$\boxed{\text{Les grandes plaques contiendront donc } 26^2 = 676 \text{ ou } 97^2 = 9409 \text{ chocolats}}.$$