Chapitre D2

Calcul matriciel

Objectifs

- Opérations matricielles, cas du produit.
- Spécificités de l'anneau des matrices carrées.
- Matrices et sous-ensembles remarquables.
- Calculs de puissances de matrices.
- Question de l'inversibilité.

Dans tout le chapitre, en l'absence de précisions, $\mathbb{K}$ désigne un corps et n, p, q des entiers naturels non nuls.

1 Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$

1.1 Notations et premières opérations

Définition D2.1

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes une application

$$A : \begin{array}{rcl} [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!] & \to & \mathbb{K} \\ (i, j) & \mapsto & a_{i,j} \end{array}.$$

Notations. On rappelle la notation sous forme de tableau.

$$\begin{array}{cc} & \text{colonne } j \\ \text{ligne } i & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

On dit qu'elle est de taille $n \times p$ ou (n,p).

Le coefficient en place (i,j) se note $[A]_{i,j}$.

On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition D2.2

(i) Les matrices de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelées **matrices colonnes** de taille n.

(ii) Les matrices de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ sont appelées **matrices lignes** de taille p.

(iii) Les matrices de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ sont appelées **matrices carrées** de taille n. On note alors $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Remarque. On identifie souvent $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ (mais on évite de le faire avec les matrices lignes).

Définition D2.3

On définit sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ les opérations suivantes :

- l'addition de $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$:

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ [A+B]_{i,j} = a_{ij} + b_{ij},$$

- la multiplication de $A = (a_{ij})$ par $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ [\lambda \cdot A]_{i,j} = \lambda a_{ij}$$

Définition D2.4

On appelle **matrice nulle** de taille $n \times p$ la matrice M dont tous les coefficients sont nuls, *i.e.* telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $[M]_{i,j} = 0$. On la note $0_{n,p}$, ou 0_n dans le cas d'une matrice carrée (où $n = p$). En l'absence d'ambiguïté, on la note simplement 0.

Définition D2.5 (Symbole de Kronecker)

Étant donnés $i, j \in \mathbb{N}$, on appelle **symbole de Kronecker** le nombre

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Définition D2.6

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on définit la **matrice élémentaire** E_{ij} par

$$\forall (k, l) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!],\ [E_{ij}]_{k,l} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = i \text{ et } l = j, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit,

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & \text{colonne } j & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \text{ligne } i \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

1.2 Produit matriciel

Définition D2.7 (Produit matriciel)

Étant données $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ deux matrices, on définit le produit $C = AB \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!],\ [C]_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}.$$

Proposition D2.8

Le produit de deux matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donne :

$$\forall i, j, k, l \in [\![1, n]\!],\ E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}.$$

Définition D2.9

(i) On appelle **matrice diagonale** toute matrice carrée M telle que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ (i \neq j \Rightarrow [M]_{i,j} = 0).$$

(ii) On appelle **matrice identité** de taille n la matrice $I_n = (\delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Notation. La matrice diagonale $\begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$ est notée $\operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$.

Proposition D2.10

Lorsqu'il est possible, le produit matriciel

- est distributif à gauche et à droite par rapport à la somme,
- est associatif,
- admet la matrice identité pour élément neutre.

En particulier, $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif dont les neutres sont 0_n pour l'addition et I_n pour la multiplication.

Remarque. Attention le produit matriciel n'est pas commutatif et admet des diviseurs de zéro.
Notation. On note A^k le produit de k matrices toutes égales à A.
Remarque. Par convention, $A^0 = I_n$.

Proposition D2.11

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

(i) $(AB)^p = A^p B^p$,

(ii) $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$.

1.3 Transposée

Définition D2.12

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la **transposée** de A, notée $A^\intercal \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\ [A^\intercal]_{i,j} = [A]_{j,i}.$$

Proposition D2.13

La transposition est linéaire, involutive et contravariante.

Définition D2.14

(i) On appelle **matrice symétrique** toute matrice carrée A qui vérifie $A^\intercal = A$.

(ii) On appelle **matrice antisymétrique** toute matrice carrée A qui vérifie $A^\intercal = -A$.

Notations. On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ respectivement l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques de taille n.

Définition D2.15

(i) On appelle **matrice triangulaire supérieure** toute matrice carrée M telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i > j \Rightarrow [M]_{i,j} = 0).$$

(ii) On appelle **matrice triangulaire inférieure** toute matrice carrée M telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i < j \Rightarrow [M]_{i,j} = 0).$$

Proposition D2.16

Les parties suivantes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont stables par produit : l'ensemble des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieures, des matrices triangulaires inférieures.

1.4 Trace d'une matrice

Définition D2.17

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A et on note $\mathrm{Tr}(A)$ le scalaire

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Proposition D2.18

(i) La trace est une forme linéaire.

(ii) $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

2 Matrices inversibles

2.1 Groupe linéaire

Définition D2.19

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

La matrice B est alors unique, notée A^{-1} et appelée **inverse** de A.

Notations. On appelle groupe linéaire, noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices inversibles de taille n.

Proposition D2.20

$(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe non abélien.

Proposition D2.21

Soit $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors

- A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$,
- AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
- $A^\intercal$ est inversible et $(A^\intercal)^{-1} = (A^{-1})^\intercal$.

Proposition D2.22

Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure). Alors

(i) T est inversible si et seulement si $\forall 0 \leqslant i \leqslant n$, $[T]_{i,i} \neq 0$.

(ii) Dans ce cas T^{-1} est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) et ses coefficients diagonaux sont $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, $[T^{-1}]_{i,i} = ([T]_{i,i})^{-1}$.

Proposition D2.23

Soit $D\,\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Alors

(i) D est inversible si et seulement si $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, $d_i \neq 0$.

(ii) Dans ce cas $D^{-1} = \mathrm{diag}(d_1^{-1}, \dots, d_n^{-1})$.

2.2 Rang et systèmes linéaires

Définition D2.24

Soit $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A est **équivalente à** B lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$.

Proposition D2.25

L'équivalence de matrices est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition et définition D2.26

La matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang $r \in [\![0, n]\!]$ si et seulement si elle est équivalente à la matrice J_r définie par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ [J_r]_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \leqslant r \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad , \quad i.e. \quad J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{array}\right).$$

Définition et proposition D2.27

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une des opérations suivantes :

- multiplication d'une ligne par un scalaire (dilatation),
- addition d'une ligne à une autre ligne (avec un éventuel coefficient multiplicateur : transvection),
- échange de deux lignes.

Ces opérations correspondent à la multiplication à gauche par une matrice inversible du type :

1. $I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ (matrice de **dilatation**),
2. $I_n + \lambda E_{ij}$ (matrice de **transvection**),
3. $I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$.

Les matrices des trois types ci-dessus sont inversibles.

Théorème D2.28

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) A est inversible.

(ii) $\operatorname{rg} A = n$.

(iii) A est équivalente par lignes à I_n.

(iv) Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle.

(v) Pour tout $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.

Méthodes

- Calcul des puissances d'une matrice
  - ➢ par récurrence,
  - ➢ à l'aide du binôme de Newton,
  - ➢ à l'aide d'un polynôme annulateur.
- Test d'inversibilité et calcul d'inverse
  - ➢ par calcul du rang,
  - ➢ en résolvant un système,
  - ➢ par l'algorithme de Gauß-Jordan,
  - ➢ à l'aide d'un polynôme annulateur.
- Calcul et caractérisation du rang.