TD D2. Calcul matriciel

1 Opérations matricielles

Exercice D2.1

Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA.
2. Calculer $(AB)^\intercal$, $A^\intercal$, $B^\intercal$ et $B^\intercal A^\intercal$.
3. Calculer $\operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr} B$, $\operatorname{tr}(AB)$ et $\operatorname{tr}(BA)$.
4. Développer $(A+B)^2$.

Exercice D2.2

Calculer lorsque c'est possible les produits AB et BA.

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
3. $A = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice D2.3

Calculer tous les produits de deux matrices possibles, où les deux matrices sont à choisir parmi :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = 3C^\intercal,$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice D2.4

Montrer que $\left\{ \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ sihx & \operatorname{ch} x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ est stable par produit.

Exercice D2.5 ✵

Calculer les puissances des matrices suivantes

1. $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice D2.6 ✵✵

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une expression de A^2 comme combinaison linéaire de A et I_3.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n, b_n \in \mathbb{R}, A^n = a_n A + b_n I_3$.
3. Déterminer une expression des suites (a_n) et (b_n) puis de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice D2.7 ✵✵

Soit A et B deux matrices carrées telles que $AB - BA = B$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}(B^k) = 0$.

Exercice D2.8 ✵✵

Soit $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{tr}\left((AB - BA)^\intercal (AB - BA)\right) = 2\left(\mathrm{tr}(A^2B^2) - \mathrm{tr}\left((AB)^2\right)\right)$.
2. En déduire que $\mathrm{tr}\left((AB)^2\right) \leqslant \mathrm{tr}(A^2B^2)$.

Exercice D2.9 ✵✵

Trouver si c'est possible deux matrices carrées A et B telles que $AB - BA = I_n$.

2 Matrices inversibles

Exercice D2.10 ✵✵

Soient X et Y deux matrices colonnes.

1. Montrer que $XY^\intercal$ est de rang 1.
2. Montrer que toute matrice carrée A de rang 1 peut s'écrire de la forme ci-dessus.
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

Exercice D2.11 ✵

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.

1. Montrer que si A et B sont nilpotentes, alors AB et $A + B$ sont également nilpotentes.
2. Montrer que si M est nilpotente, alors $I_n - M$ est inversible et donner son inverse.

Exercice D2.12

Calculer l'inverse des matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice D2.13

Déterminer le rang des matrices suivantes. Dans l'éventualité où il serait maximal pour une matrice carrée, calculer l'inverse de la matrice.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice D2.14 ⚙

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice D2.15 ⚙⚙

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^2, Q^2, PQ et QP.
2. Exprimer A en fonction de P et Q puis pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k en fonction de P et Q.
3. Cette relation est-elle vraie pour $k \in \mathbb{Z}$?

Exercice D2.16 ⚙⚙

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer trois valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ telles que $\forall i \in \{1,2,3\}$, le système $AX = \lambda_i X$ a une solution $X_i \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle.
2. Soit P la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui a pour colonnes X_1, X_2 et X_3.
3. Déterminer sans calculs une matrice diagonale D telle que $AP = PD$.
4. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Calculer de la même manière les puissances des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice D2.17 ✿✿

Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall 1 \leqslant i,j \leqslant n$, $[N]_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Calculer N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall 1 \leqslant i,j \leqslant n$, $[A]_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } j \geqslant i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Exprimer A à l'aide des puissances de N puis montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice D2.18 ✿

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on note $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & x \end{pmatrix}$. Soit $E = \{M(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E est stable par produit.
2. Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, calculer $M(xz, -yz)M(x,y)$.
3. Pour quels couples (x,y) la matrice $M(x,y)$ est-elle inversible ? Donner son inverse dans ce cas.

Exercice D2.19 ✿✿

Soit $E = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exists a, b \in \mathbb{R}, \forall i,j \in [\![1,n]\!], [M]_{i,j} = \begin{cases} a \text{ si } i = j \\ b \text{ sinon} \end{cases} \right\}$.

1. Montrer que E est stable par produit.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a et b une matrice $M \in E$ est-elle inversible ? Montrer que dans ce cas, $M^{-1} \in E$.

Exercice D2.20 ✿✿✿

Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante et multiplicative, *i.e.* telle que

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(A)f(B).$$

Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(A) = 0$ si et seulement si A n'est pas inversible.