Programme de colle 16 : du 26/01 au 30/01

Arithmétique des entiers

- Division euclidienne.
- PGCD, PPCM (au sens de $\leqslant$), caractérisations, propriétés.
- Algorithme d'Euclide, algorithme d'Euclide étendu, identité de Bézout.
- Nombres premiers entre eux, caractérisation par le théorème de Bézout, propriétés.
- Théorème de Gauß.
- Relation entre PGCD et PPCM.
- Extension des définitions au cas d'une famille finie de nombres entiers.
- Nombres premiers entre eux dans leur ensemble ou deux à deux. Propriétés de Bézout.
- Nombres premiers, cardinal infini.
- Petit théorème de Fermat.
- Décomposition primaire : existence et unicité d'une décomposition en produit de nombres premiers.
- Valuations p-adiques, formules, lien avec la divisibilité, calcul de PGCD, PPCM.
- Méthodes de résolution : équations modulaires du type $ax \equiv b\ [m]$, petits systèmes de congruences, équations diophantiennes du type $ax + by = c$.

Exercices abordés dans le TD C3 : 3, 11, 13, 19, 31, 37, 41, 43, 59, 67.

Dénombrement

- Cadre théorique : ensembles finis, cardinal.
- Propriétés : cardinal d'une partie (cas d'égalité), union disjointe, produit cartésien, union de deux parties (formule du crible).
- Principes de dénombrement : principes des bergers, des tiroirs.
- Dénombrement de p-listes, p-arrangements, p-ermutations, p-combinaisons.
- Dénombrement des applications de E dans F, des injections de E dans F, des applications strictement croissantes, des parties à p éléments d'un ensemble fini.
- Interprétation combinatoire des formules sur les coefficients binomiaux.

Exercices abordés dans le TD E1 : 3, 4, 5, 7, 9, 10.

Questions de cours

- ➢ Énoncé et démonstration du théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.
- ➢ Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors $(ka) \wedge (kb) = k(a \wedge b)$.
- ➢ Énoncé et démonstration du petit théorème de Fermat (au moins la première assertion).
- ➢ Détermination du nombre d'anagrammes d'un mot (au choix de l'examinateur).
- ➢ Détermination du nombre de distributions possibles de 30 cadeaux (identiques) à 20 personnes (exo E1.9).

Remarques

- L'arithmétique est développée purement dans $\mathbb{Z}$ sans théorie sur les anneaux (euclidiens/factoriels/principaux).
- En dénombrement, la politique des jurys de concours est d'accepter les raisonnements corrects même s'il ne sont pas nécessairement d'un formalisme absolu. Par contre, les arguments doivent être clairement identifiés pour justifier les ingrédients de chaque formule (somme, produit, puissance, factorielle, coefficient binomial...).
- En plus du savoir-faire, il est important de savoir énoncer les définitions des notions ou les théorèmes employés.

Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.

Bonne semaine de colle !