Problème 1

1. Soit $a, b, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $a^k \mid b^k$. Soit $p \in \mathscr{P}$. Par propriétés des valuations p-adiques, on a $\nu_p(a^k) \leqslant \nu_p(b^k)$. Or $\nu_p(a^k) = k\nu_p(a)$ et $\nu_p(b^k) = k\nu_p(b)$. Comme $k > 0$, on en déduit $\nu_p(a) \leqslant \nu_p(b)$. On a donc prouvé $\{p \in \mathscr{P} \mid \nu_p(a) \leqslant \nu_p(b)\}$, de quoi on déduit $a \mid b$ par théorème de cours.

$$\boxed{\text{Si } a^k \mid b^k, \text{ alors } a \mid b.}$$

2. Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = m^k$. Soit $p \in \mathscr{P}$. On a $\nu_p(n) = k\nu_p(m)$, donc $\nu_p(n) \equiv 0$ $[k]$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\{p \in \mathscr{P} \mid \nu_p(n) \equiv 0\ [k]\}$. On décompose n en produit de facteurs premiers. Il existe un ensemble fini Q de nombres premiers tel que

$$n = \prod_{p \in Q} p^{\nu_p(n)}.$$

Par hypothèse, pour tout $p \in \mathscr{P}$, il existe $\alpha_p \in \mathbb{N}$ tel que $\nu_p(n) = k\alpha_p$. On pose alors

$$m = \prod_{p \in Q} p^{\alpha_p}.$$

On a alors

$$m^k = \left(\prod_{p \in Q} p^{\alpha_p}\right)^k = \prod_{p \in Q} p^{k\alpha_p} = \prod_{p \in Q} p^{\nu_p(n)} = n.$$

Donc

$$\boxed{\left(\exists m \in \mathbb{N}^*\ n = m^k\right) \Leftrightarrow (\forall p \in \mathscr{P},\ \nu_p(n) \equiv 0\ [k])}.$$

3. Soit $m, k, a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \wedge b = 1$ et $ab = m^k$. Soit $p \in \mathscr{P}$. Comme $a \wedge b = 1$, on a $\min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\} = 0$. Comme $ab = m^k$, on a $\nu_p(a) + \nu_p(b) = k\nu_p(m)$. On a donc deux possibilités, soit $(\nu_p(a), \nu_p(b)) = (0, k\nu_p(m))$, soit $(\nu_p(a), \nu_p(b)) = (k\nu_p(m), 0)$. Dans tous les cas, on a $\nu_p(a) \equiv 0\ [k]$ et $\nu_p(b) \equiv 0\ [k]$. On en déduit le résultat à l'aide de la question précédente.

$$\boxed{\text{Si } ab = m^k \text{ et } a \wedge b = 1, \text{ alors il existe } c, d \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } a = c^k \text{ et } b = d^k.}$$

4. (a) Soit $d = a \wedge b$. Alors d^2 divise a^2 et b^2, donc $d^2 \mid (a^2 + b^2)$, donc $d^2 \mid c^2$. On en déduit $d \mid c$ d'après la question 1. En particulier $a \wedge b$ divise a, b et c, donc $a \wedge b \mid a \wedge c$ et $a \wedge b \mid b \wedge c$. On montre de même $a \wedge c \mid a \wedge b$ et $b \wedge c \mid a \wedge b$. Donc

$$\boxed{a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c}.$$

(b) Posons $\delta = a \wedge b$. On a $\delta \mid a$ et $\delta \mid b$. De plus, d'après la question précédente, $\delta \mid c$. Donc il existe $a', b', c' \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = \delta a'$, $b = \delta b'$ et $c = \delta c'$. Il reste à montrer que (a', b', c') est un triplet pythagoricien primitif.

- Comme (a,b,c) est un triplet pythagoricien, $a^2+b^2=c^2$. Ainsi $\delta^2\big((a')^2+(b')^2\big)=\delta^2(c')^2$. Comme $\delta>0$, on en déduit $(a')^2+(b')^2=(c')^2$, donc (a',b',c') est un triplet pythagoricien.
- On a $\delta=a\wedge b=\delta a'\wedge\delta b'=\delta a'\wedge b'$, donc $a'\wedge b'=1$ et (a',b',c') est un triplet pythagoricien primitif.

$$\boxed{\text{Il existe } \delta\in\mathbb{N}^* \text{ et un triplet pythagoricien primitif } (a',b',c') \text{ tel que } a=\delta a',\ b=\delta b' \text{ et } c=\delta c'.}$$

5. Soit $n\in\mathbb{N}$.
   - Si n est pair, alors $2\mid n$, donc $4\mid n^2$, donc $n^2\equiv 0\ [4]$.
   - Si n est impair, alors $n\equiv 1\ [4]$ ou $n\equiv 3\ [4]$. Dans les deux cas $n^2\equiv 1\ [4]$.

   On a donc montré qu'un carré est congru à 0 ou à 1 modulo 4.

   Comme $a\wedge b=1$, a et b ne peuvent pas être tous les deux pairs. Supposons que a et b soient tous les deux impairs. D'après ce qui précède, on a $a^2\equiv 1\ [4]$ et $b^2\equiv 1\ [4]$, donc $c^2=a^2+b^2\equiv 2\ [4]$, ce qui est impossible. Donc a et b n'ont pas la même parité. On a alors $c^2\equiv 1\ [4]$, donc c est impair.

   $$\boxed{a \text{ et } b \text{ n'ont pas la même parité et } c \text{ est impair.}}$$

6. (a) Soit $d=c-a\wedge c+a$. d divise $2c$ et $2a$, donc d divise $2a\wedge c=2$ car $a\wedge c=a\wedge b=1$. De plus, comme a et c sont impairs, $c-a$ et $c+a$ sont pairs, donc $2\mid d$. Donc

   $$\boxed{(c-a)\wedge(c+a)=2}.$$

   (b) Comme b est pair, il existe $b'\in\mathbb{N}^*$ tel que $b=2b'$. On a alors $b^2=4(b')^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)$, donc $(b')^2=uv$ avec $u=\dfrac{c+a}{2}$ et $v=\dfrac{c-a}{2}$. D'après la question précédente, $u,v\in\mathbb{N}^*$ et $u\wedge v=1$. On en déduit, d'après la question 3, qu'il existe $p,q\in\mathbb{N}^*$ tels que $u=p^2$ et $v=q^2$.

   $$\boxed{\text{Il existe } p,q\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } \frac{c+a}{2}=p^2 \text{ et } \frac{c-a}{2}=q^2.}$$

   On en déduit directement $c=p^2+q^2$, $a=p^2-q^2$ et $b^2=4p^2q^2$, donc $b=2pq$ car $b,p,q>0$.

   $$\boxed{a=p^2-q^2,\quad b=2pq,\quad c=p^2+q^2}.$$

   (c) En reprenant les notations de la question précédente, on a $u\wedge v=1$, donc $p^2\wedge q^2=1$. Or $p^2\wedge q^2=\big(p\wedge q\big)^2$, donc $p\wedge q=1$. On en déduit que p et q ne peuvent pas être tous les deux pairs. Si p et q sont tous les deux impairs, alors $c=p^2+q^2$ serait pair, ce qui n'est pas le cas. Donc p et q n'ont pas la même parité. Enfin, comme $a>0$, on a $p^2>q^2$, donc $q<p$.

   $$\boxed{p \text{ et } q \text{ sont premiers entre eux, n'ont pas la même parité et } q<p.}$$

7. Soit $p,q\in\mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que p et q n'ont pas la même parité et que $q<p$. Posons $a=p^2-q^2$, $b=2pq$ et $c=p^2+q^2$. Comme $p,q\in\mathbb{N}^*$ et $q<p$, on a $a,b,c\in\mathbb{N}^*$.
   - On a

   $$a^2+b^2=(p^2-q^2)^2+(2pq)^2=p^4-2p^2q^2+q^4+4p^2q^2=p^4+2p^2q^2+q^4=(p^2+q^2)^2=c^2.$$

   Donc (a,b,c) est un triplet pythagoricien.

- Soit $\delta = a \wedge b$. D'après la question 4a, on a $\delta = a \wedge c$. En particulier δ divise a et c, donc δ divise $c+a = 2p^2$ et $c-a = 2q^2$. Ainsi δ divise $2p^2 \wedge 2q^2 = 2(p\wedge q)^2 = 2$. De plus, comme p et q n'ont pas la même parité, a est impair. On en conclut que $\delta = 1$. Donc (a,b,c) est un triplet pythagoricien primitif.
- Enfin, comme a est impair, (a,b,c) est un triplet pythagoricien primitif rangé.

$$\boxed{(p^2-q^2,\ 2pq,\ p^2+q^2) \text{ est un triplet pythagoricien primitif rangé.}}$$

8. Soit $\delta = a \wedge b$. Alors δ^4 divise a^4 et b^4, donc $\delta^4 \mid (a^4 - b^4)$, donc $\delta^4 \mid c^2$. On en déduit $\delta^2 \mid c$ d'après la question 1. Ainsi, il existe $a', b', c' \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = \delta a'$, $b = \delta b'$ et $c = \delta^2 c'$. Comme $a^4 - b^4 = c^2$, on a
$$\delta^4\big((a')^4 - (b')^4\big) = \delta^4 (c')^2,$$
donc $(a')^4 - (b')^4 = (c')^2$ car $\delta > 0$. De plus,
$$\delta = a \wedge b = \delta a' \wedge b',$$
donc $a' \wedge b' = 1$ et (a', b', c') est une solution primitive de (E) telle que $a' \leqslant a$.

$$\boxed{(E) \text{ admet une solution primitive } (a',b',c') \text{ telle que } a' \leqslant a.}$$

9. Supposons a pair. Comme $a\wedge b = 1$, b est impair. Rappelons qu'un carré est congru à 0 ou à 1 modulo 4. Ainsi $b^2 \equiv 1\ [4]$ et $b^4 \equiv 1\ [4]$. Comme $a^2 \equiv 0\ [4]$, on en déduit $c^2 \equiv 3\ [4]$, ce qui est absurde. Donc a est impair.

$$\boxed{a \text{ est impair.}}$$

10. Supposons b impair. Comme $(b^2)^2 + c^2 = (a^2)^2$, (b^2, c, a^2) est un triplet pythagoricien. De plus, $a^2 \wedge b^2 = (a \wedge b)^2 = 1$ et b^2 est impair. C'est donc un triplet pythagoricien primitif rangé. D'après la question 6, il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que
$$b^2 = p^2 - q^2 \quad \text{et} \quad a^2 = p^2 + q^2.$$
On a alors $(ab)^2 = p^4 - q^4$, donc (p, q, ab) est une solution primitive de (E). De plus, $p^2 < a^2$, donc $p < a$. Donc (E) admet une solution primitive $(a', b', c') = (p, q, ab)$ telle que $a' < a$.

$$\boxed{\text{Si } b \text{ est impair, } (E) \text{ admet une solution primitive } (a',b',c') \text{ telle que } a' < a.}$$

11. (a) Supposons b pair. Comme $c^2 + (b^2)^2 = (a^2)^2$, $a^2 \wedge b^2 = (a\wedge b)^2 = 1$ et b^2 est pair, (c, b^2, a^2) est un triplet pythagoricien primitif rangé. D'après la question 6, il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, de parité différente, tels que
$$b^2 = 2pq \quad \text{et} \quad a^2 = p^2 + q^2.$$
Quitte à échanger p et q, on peut supposer p impair et q pair.

$$\boxed{\text{Il existe } p, q \in \mathbb{N}^* \text{ premiers entre eux tels que } p \text{ est impair, } q \text{ est pair, } b^2 = 2pq \text{ et } a^2 = p^2 + q^2.}$$

(b) Comme b et q sont pairs, il existe $b', q' \in \mathbb{N}^*$ tels que $b = 2b'$ et $q = 2q'$. On a alors $(b')^2 = pq'$. Comme p est premier avec q, p est premier avec q'. D'après la question 3, il existe $r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que $p = r^2$ et $q' = s^2$. Ainsi
$$a^2 = r^4 + 4s^4.$$

De plus, $r^2 \wedge 2s^2 = p \wedge q = 1$, donc $(r^2, 2s^2, c)$ est un triplet pythagoricien primitif rangé. D'après la question 6, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que

$$s^2 = \alpha\beta \quad \text{et} \quad r^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

D'après la question 3, il existe $t, u \in \mathbb{N}^*$ tels que $\alpha = t^2$ et $\beta = u^2$. Ainsi $r^2 = t^4 - u^4$. De plus, t et u sont premiers entre eux. Donc (t, u, r) est une solution primitive de (E). Enfin,

$$t^4 < 4t^4u^4 = 4s^4 < a^2 < a^4,$$

donc $t < a$.

$$\boxed{\text{Si } b \text{ est pair, } (E) \text{ admet une solution primitive } (a', b', c') \text{ telle que } a' < a.}$$

12. Supposons que (E) admette une solution dans $(\mathbb{N}^*)^3$. D'après la question 8, (E) admet des solutions primitives. Considérons l'ensemble

$$\mathscr{A} = \left\{a \in \mathbb{N}^* \mid \exists b, c \in \mathbb{N}^*,\ a^4 - b^4 = c^2 \text{ et } a \wedge b = 1\right\}.$$

Par hypothèse, $\mathscr{A}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$. Elle admet donc un plus petit élément a_0. Il existe alors $b_0, c_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que (a_0, b_0, c_0) est une solution primitive de (E) et toute solution primitive (a, b, c) de (E) vérifie $a_0 \leqslant a$. Cela contredit les résultats des questions 10 et 11.

$$\boxed{(E) \text{ n'admet aucune solution dans } (\mathbb{N}^*)^3.}$$

13. Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $a^4 + b^4 = c^4$. On a alors

$$c^4 - a^4 = (b^2)^2.$$

Donc (c, a, b^2) est une solution de (E) appartenant à $(\mathbb{N}^*)^3$, ce qui est impossible.

$$\boxed{\text{L'équation } a^4 + b^4 = c^4 \text{ n'admet aucune solution } (a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3.}$$