DEVOIR MAISON N° 14

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n et on définit

$$\mathcal{N}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists p \in \mathbb{N},\ M^p = 0_n\}.$$

Autrement dit $\mathcal{N}_n$ est l'ensemble des matrices carrées de taille n telles qu'une de leur puissance est la matrice nulle.
On notera 0_n la matrice nulle et I_n la matrice identité de taille n.

1. Donner un exemple de matrice non nulle de $\mathcal{N}_2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in \mathcal{N}_3$.
3. Soit $A \in \mathcal{N}_n$. Montrer que $\lambda A \in \mathcal{N}_n$.
4. La question de la somme.
   (a) Soit $A, B \in \mathcal{N}_n$ telles que $AB = BA$. Montrer que $A + B \in \mathcal{N}_n$.
   (b) Ce résultat est-il encore vrai si on ne suppose pas que A et B commutent ?
5. La question du produit.
   (a) Soit $A, B \in \mathcal{N}_n$. Montrer que si $AB \in \mathcal{N}_n$, alors $BA \in \mathcal{N}_n$.
   (b) Soit $A \in \mathcal{N}_n$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $AC = CA$, alors $AC \in \mathcal{N}_n$.
   (c) Donner deux matrices $A, B \in \mathcal{N}_2$ telles que $AB \notin \mathcal{N}_2$.
6. Questions d'inversibilité : soit $A \in \mathcal{N}_n$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$.
   (a) Montrer que A n'est pas inversible ?
   (b) Montrer que la matrice $I_n - A$ est inversible et déterminer $(I_n - A)^{-1}$.
   (c) Que pensez-vous de l'inversibilité de la matrice $I_n + A$.
7. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $[J]_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i + 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Calculer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.