Exercice 1

1. La tablette ayant un sens bien défini, chacune des 24 cases peut être identifiée par un numéro de 1 à 24, ou par deux coordonnées de 1 à 6 et de 1 à 4 ou encore par une lettre (1-D) et un nombre (1-6). Dans tous les cas, soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des 24 cases. Définir une tablette, c'est donner les 4 cases qui seront blanches (ou les 20 cases qui seront noires). Il s'agit donc d'une partie de $\mathcal{C}$ à quatre éléments (l'ensemble des quatre cases blanches).

   Cela donne $\boxed{N = \binom{24}{4} \text{ tablettes différentes}}$ (ou $\binom{24}{20}$ naturellement).

2.
   - Il y a 4 manières de choisir le coin qui sera blanc.
   - Pour chacune d'entre elles, il reste à placer 3 carrés blancs parmi les 20 autres. Il y a $\binom{20}{3}$ manières de faire cela (comme précédemment).

   Cela donne un total de $\boxed{4 \times \binom{20}{3} \text{ tablettes}}$.

3. Une tablette avec un carré blanc sur chaque ligne est donnée par quatre numéros de colonnes correspondant à la position en colonne du carré blanc sur chaque ligne. Il s'agit d'une 4-liste de $\{1, \dots, 6\}$. Cela donne $\boxed{6^4 \text{ tablettes}}$. Formellement, repérons les cases par une lettre (1-D) et un nombre (1-6). L'application qui à une 4-liste (m, n, p, q) de $\{1, \dots, 6\}$ associe les quatre cases (Am, Bn, Cp, Dq) (par exemple $(4, 2, 4, 5) \mapsto \{A4, B2, C4, D5\}$) est une bijection entre l'ensemble recherché et l'ensemble des 4-listes (m, n, p, q) de $\{1, \dots, 6\}$.

4. Dénombrons le complémentaire, à savoir les tablettes sans carré blanc sur la première ligne. Cela revient simplement à sélectionner les quatre carrés blancs parmi les 18 cases du reste de la grille, soit $\binom{18}{4}$ possibilités.

   Cela donne donc $N - \binom{18}{4} = \boxed{\binom{24}{4} - \binom{18}{4} \text{ tablettes}}$.

5. Une tablette est donnée par
   - le choix des quatre colonnes concernées, ce qui donne $\binom{6}{4}$ possibilités,
   - pour chacune de ces possibilités, le choix dans chaque colonne de la ligne occupée par le carré blanc. De manière analogue à la question précédente, cela donne 4^4 possibilités.

   Finalement, on a $\boxed{\binom{6}{4} \times 4^4 = 15 \times 4^4 \text{ tablettes}}$.

6. On raisonne comme pour la question 5. On doit donner exactement une case par ligne, repérée par son numéro de colonne. Cette fois cependant, les 4 numéros de colonnes doivent être différents. Cela revient à donner un 4-arrangement de $\{1, \dots, 6\}$.

   Cela donne $A_6^4 = \boxed{\frac{6!}{2!} = 360 \text{ tablettes}}$.

7. De manière analogue à la question précédente, pour chaque ligne, il s'agit de donner un numéro de colonne, sans répétition possible. Cela revient à donner un n-arrangement des numéros de colonne

$\{1, \ldots, n\}$, c'est à dire une permutation de $\{1, \ldots, n\}$.
On a donc $\boxed{n! \text{ tablettes}}$.
Autre manière plus formelle de voir les choses : l'application qui à chaque numéro de ligne associe le numéro de la colonne où se situe le carré blanc dans cette ligne réalise une permutation de $\{1, \ldots, n\}$.
Le premier entier n tel que $n! > 1000$ est $n = 7$ ($6! = 720$). Il faut donc prévoir des tablettes à $\boxed{\text{7 carreaux de côté}}$ (ce qui permettra d'éponger une éventuelle demande de plus de 5000 tablettes...MIAM !).