Chapitre C4

Polynômes

Objectifs

- Saisir l'objet algébrique que sont les polynômes et la représentation qui en est faite.
- Appréhender la correspondance avec les fonctions polynomiales.
- Maîtriser la dualité (algèbre/analyse) des notions de racine et de racine multiple.
- Adapter aux polynômes les notions d'arithmétique.

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Structure

1.1 Anneau des polynômes

Définition C4.1

On appelle **polynôme** à coefficients dans $\mathbb{K}$ une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang, *i.e.* telle que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant N, a_k = 0.$$

Proposition et définition C4.2

Soit $P = (a_0, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ et $Q = (b_0, \ldots, b_n, 0, \ldots)$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- la suite $(\lambda a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un polynôme, noté $\lambda \cdot P$ ou λP ;
- la suite $(a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un polynôme, noté $P + Q$ et appelé la **somme** de P et Q ;
- la suite $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

  est un polynôme, noté $P \times Q = (c_0, \ldots, c_n, \ldots)$ et appelé **produit** de P et Q.

Notations.

- On note 1 le polynôme $(1, 0, \ldots)$.
- On note X le polynôme $(0, 1, 0, \ldots)$.
- On note naturellement X^n le produit n fois de X par lui-même, qui donne

$$X^n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ zéros}}, \underbrace{1}_{a_n}, 0, \ldots).$$

- Avec ces notations, $P = (a_0, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ sera noté

$$P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = P(X).$$

Proposition C4.3

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif dont le neutre pour $+$ est le polynôme nul $0 = (0)_{k \in \mathbb{N}}$ et le neutre pour $\times$ est polynôme $1 = (1, 0, 0, \ldots)$.

Définition C4.4

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. La **composition** des polynômes P et Q est le polynôme $P \circ Q$ défini par

$$(P \circ Q)(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q(X)^k.$$

Définition C4.5

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$. Alors on appelle

(i) **degré de** P l'entier n, noté $\deg(P)$. Autrement dit

$$\deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}.$$

(ii) **terme dominant** de P le monôme $a_n X^n$ et **coefficient dominant** le coefficient a_n, que l'on notera $c_d(P)$,

(iii) polynôme **constant** un polynôme de degré 0,

(iv) **polynôme normalisé** ou **unitaire** un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1.

Remarque. Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Notation. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Proposition C4.6

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

(i) $\deg(\lambda P) \leqslant \deg(P)$,

(ii) si $\lambda \neq 0$, alors $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ et $c_d(\lambda P) = \lambda c_d(P)$,

(iii) $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$,

(iv) si $\deg(P) < \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) = \deg(Q)$ et $c_d(P+Q) = c_d(Q)$,

(v) $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$ et $c_d(P \times Q) = c_d(P) \times c_d(Q)$,

(vi) si $\deg(Q) \geqslant 1$, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$.

Proposition C4.7

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P \times Q = 0 \Leftrightarrow P = 0$ ou $Q = 0$. Autrement dit, $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

Proposition C4.8

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. P est inversible si et seulement si P est constant non nul.

1.2 Fonctions polynomiales

Définition C4.9

Étant donné un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on appelle **fonction polynomiale** associée à P la fonction

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{P} : & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \end{array}$$

Proposition et définition C4.10

L'application $\begin{array}{rccl} \mathrm{ev}_x : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \\ & P & \mapsto & \widetilde{P}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$ est un morphisme d'anneaux, vérifiant également

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}, \mathrm{ev}_x(\lambda P) = \lambda \, \mathrm{ev}_x(P)$$

et appelé **morphisme d'évaluation en** x.

Définition C4.11 (Polynôme dérivé)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

- On définit alors le **polynôme dérivé** de P par

$$P' = a_1 + 2a_2 X + \ldots + na_n X^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$

- On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ le **k-ième polynôme dérivé** par
  - ➢ $P^{(0)} = P$,
  - ➢ $\forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k+1)} = \left[P^{(k)}\right]'$.

Proposition C4.12

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$.

(i) si $n > 0$, alors $\deg P' = \deg P - 1$ et $c_d(P') = nc_d(P)$,

(ii) P est constant si et seulement si $P' = 0$.

Remarque. Cette propriété sur le degré de P' ne se généralisera qu'à un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle.

Proposition C4.13

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors

(i) $(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$;

(ii) $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a la formule de Leibniz :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

Proposition C4.14 (Formule de Taylor)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

2 Arithmétique des polynômes

2.1 Division euclidienne

Définition C4.15 (Divisibilité)

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A **divise** B, ou que B est **divisible** par (ou **un diviseur**) de A, et on note $A \mid B$ s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = A \times Q$. On dit alors aussi que B est un **multiple** de A.

Proposition C4.16

Soit $A, B, C, D, U, V \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Si $B \neq 0$ et $A \mid B$, alors $\deg A \leqslant \deg B$.

(ii) Si $A \mid B$ et $A \mid C$, alors $A \mid (UB + VC)$.

(iii) Si $A \mid B$ et $C \mid D$, alors $AC \mid BD$.

(iv) Si $(AB) \mid (AC)$ et $A \neq 0$, alors $B \mid C$.

Proposition C4.17

La relation de divisibilité est réflexive et transitive.

Proposition et définition C4.18

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $A \mid B$ et $B \mid A$.

(ii) $A \mid B$ et $\deg A = \deg B$.

(iii) $\exists \lambda \in \mathbb{K}^\times$, $A = \lambda B$.

Dans ce cas on dit que A et B sont **associés** et on note $A \sim B$.

Théorème et définition C4.19 (Division euclidienne)

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, B étant différent du polynôme nul. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

- $A = BQ + R$,
- $\deg R < \deg B$.

On dit que Q est le **quotient** et R le **reste** de la division euclidienne de A par B.

Remarque. C'est le degré qui joue ici le rôle d'indicateur de « stricte décroissance » du processus (variant de boucle dans l'algorithme d'Euclide notamment). Une telle fonction (valeur absolue sur $\mathbb{Z}$, deg sur $\mathbb{K}[X]$) s'appelle un **stathme euclidien**. Un anneau disposant d'une division euclidienne s'appelle un **anneau euclidien** et on peut y définir toutes les notions arithmétiques déjà vues sur $\mathbb{Z}$ et rappelées ici dans $\mathbb{K}[X]$.

2.2 PGCD, PPCM

Notation. Notons $\text{Div}(A)$ l'ensemble des diviseurs d'un polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ et plus généralement $\text{Div}(A_1, \ldots, A_n) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ P \mid A_i\}$.

Lemme C4.20

(i) Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, $\text{Div}(A, 0) = \text{Div}(A)$.

(ii) Si $A = BQ + R$, avec $A, B, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, alors $\text{Div}(A, B) = \text{Div}(B, R)$.

Proposition et définition C4.21

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Il existe $D \in \mathbb{K}[X]$, $\text{Div}(A, B) = \text{Div}(D)$. Un tel polynôme est appelé **un plus grand commun diviseur (PGCD)** de A et B.

(ii) Tous les PGCD de A et B sont associés.

(iii) Si $A \neq 0$ ou $B \neq 0$, les PGCD de A et B sont les éléments de $\text{Div}(A, B)$ de degré maximal. Parmi eux, un seul est unitaire, appelé **le PGCD** de A et B, noté $A \wedge B$.

(iv) Par convention, si $A = B = 0$, $A \wedge B = 0$.

Proposition et définition C4.22

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Si $A \neq 0$ ou $B \neq 0$, tout multiple commun à A et B de degré minimal est appelé **un plus petit commun multiple** de A et B. Tous les PPCM de A et B sont associés. Parmi eux, un seul est unitaire, appelé **le PPCM** de A et B, noté $A \vee B$.

(ii) Par convention, si $A = B = 0$, $A \vee B = 0$.

Remarque. On importe du cas de $\mathbb{Z}$ les propriétés sur les PGCD et PPCM, ainsi que l'algorithme d'Euclide pour déterminer un PGCD. On étend également ces définitions au cas d'un nombre fini de polynômes.

Proposition C4.23

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots A_n \in \mathbb{K}[X]$.

(i) $\forall D \in \mathbb{K}[X]$, $D \mid \left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i\right) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $D \mid A_i$.

(ii) $\forall M \in \mathbb{K}[X]$, $\left(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\right) \mid M \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $A_i \mid M$.

2.3 Bézout

Théorème C4.24

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots A_n \in \mathbb{K}[X]$. Il existe $U_1, \dots, U_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} A_i U_i = \bigwedge_{i=1}^{n} A_i$.

Proposition C4.25

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots A_n \in \mathbb{K}[X]$ et B un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$.

(i) $\bigwedge_{i=1}^{n} (BA_i) = B\left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i\right)$.

(ii) si $n \neq 0$, alors $\bigvee_{i=1}^{n} (BA_i) = B\left(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Définition C4.26

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A et B sont **premiers entre eux** lorsque $A \wedge B = 1$.

Définition C4.27

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots A_n \in \mathbb{K}[X]$.

(i) On dit que les $A_1, \dots, A_n$ sont **premiers entre eux dans leur ensemble** lorsque

$$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i = 1.$$

(ii) On dit que les $A_1, \dots, A_n$ sont **premiers entre eux deux à deux** lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ i \neq j \Rightarrow A_i \wedge A_j = 1.$$

Théorème C4.28 (Bézout)

(i) Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. $A \wedge B = 1 \Leftrightarrow \exists U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

(ii) $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} A_i = 1 \Leftrightarrow \exists U_1, \dots, U_n, \sum_{i=1}^{n} A_i U_i = 1.$

Proposition C4.29

Soit $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Si $A \wedge B = 1$ et $C \mid B$, alors $A \wedge C = 1$.

(ii) Si $A \wedge B = 1$ et $A \wedge C = 1$, alors $A \wedge (BC) = 1$.

(iii) Si $A \wedge B = 1$, alors $\forall p, q \in \mathbb{N},\ A^p \wedge B^q = 1$.

2.4 Gauß

Théorème C4.30 (Gauß)

Soit $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$(A \mid BC \text{ et } A \wedge B = 1) \Rightarrow A \mid C$$

Théorème C4.31

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Si $A \wedge B = 1$, alors $A \vee B = AB$.

(ii) $(A \wedge B)(A \vee B) = AB$.

3 Racines d'un polynôme

3.1 Racines

Définition C4.32

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine** ou un **zéro** de P si $\widetilde{P}(\alpha) = 0$.

Théorème C4.33

(i) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors

$$\alpha \text{ est une racine de } P \quad \Leftrightarrow \quad (X-\alpha)|P.$$

(ii) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Alors

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r \text{ sont racines de } P \quad \Leftrightarrow \quad \left(\prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)\right)|P.$$

Corollaire C4.34

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(i) Tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n admet au plus n racines.

(ii) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n et c_n son coefficient dominant. Si P admet deux racines deux à deux distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, alors

$$P(X) = c_n \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i).$$

(iii) Tout polynôme de degré n qui admet au moins $n+1$ racines est le polynôme nul.

(iv) Soit $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Si $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$, alors $P = Q$.

Remarque. Ceci montre la bijectivité de la correspondance entre polynômes et fonctions polynomiales $P \mapsto \widetilde{P}$. Ce résultat est généralisable avec $\mathbb{K}$ un corps quelconque, dès que ce dernier est infini.

3.2 Racines multiples

Définition C4.35 (Racines multiples)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

(i) On appelle **ordre de multiplicité** de α en tant que racine de P l'entier $\nu_\alpha(P)$ défini par

$$\nu_\alpha(P) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid (X-\alpha)^k \mid P\}.$$

(ii) Une racine d'ordre 1 est une **racine simple**

(iii) Une racine d'ordre strictement supérieur à 1 est une **racine multiple**.

Proposition C4.36

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors $\nu_\alpha(P) \geqslant p$ si et seulement si $(X-\alpha)^p \mid P$.

Proposition C4.37

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\nu_\alpha(P) = p$,

(ii) $(X-\alpha)^p \mid P$ et $(X-\alpha)^{p+1} \nmid P$,

(iii) il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

- $P = (X-\alpha)^p Q$,
- $Q(\alpha) \neq 0$.

Théorème C4.38 (Caractérisation de la multiplicité d'une racine)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

(i) $\nu_\alpha(P) \geqslant p$ si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(p-1)}(\alpha) = 0$.

(ii) $\nu_\alpha(P) = p$ si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(p-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(p)}(\alpha) \neq 0$.

Remarque. Cette caractérisation, comme les précédents résultats sur les polynômes dérivés, ne s'étend qu'aux corps de caractéristique nulle.

Proposition C4.39

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

(i) Si $\nu_\alpha(P) \geqslant 1$, alors $\nu_\alpha(P') = \nu_\alpha(P) - 1$.

(ii) si $P \mid Q$, alors $\nu_\alpha(P) \leqslant \nu_\alpha(Q)$,

(iii) $\nu_\alpha(PQ) = \nu_\alpha(P) + \nu_\alpha(Q)$,

(iv) $\nu_\alpha(P+Q) \geqslant \min\{\nu_\alpha(P), \nu_\alpha(Q)\}$ avec égalité si $\nu_\alpha(P) \neq \nu_\alpha(Q)$.

Théorème C4.40

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments distinct de $\mathbb{K}$ et $\nu_1, \ldots \nu_r \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, α_i est une racine de multiplicité ν_i de P.

(ii) Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P(X) = \left(\prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{\nu_i}\right) Q(X) \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, r]\!],\, Q(\alpha_i) \neq 0.$$

Corollaire C4.41

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de racines de P, comptées avec multiplicités, est inférieur ou égal à n. Autrement dit, si pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, α_i est une racine de multiplicité ν_i de P, alors

$$\sum_{i=1}^{r} \nu_i \leqslant n.$$

4 Factorisation dans $\mathbb{K}[X]$

Définition C4.42

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on note a_n son coefficient dominant. On dit que P est **scindé sur** $\mathbb{K}$ s'il existe des scalaires $\alpha_k \in \mathbb{K}$ (pas nécessairement distincts) tels que

$$P = a_n(X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_n) = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k).$$

Définition C4.43 (irréductibilité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. On dit que P est irréductible si

$$P = AB \Rightarrow A \in \mathbb{K} \text{ ou } B \in \mathbb{K}.$$

Proposition C4.44

Les polynômes de degré 1 sont irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

Théorème C4.45 (Décomposition en produit d'irréductibles)

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et m polynômes $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ irréductibles et unitaires tels que

$$P = \alpha \prod_{k=1}^{m} P_k.$$

De plus α et l'ensemble des P_k sont uniques.

4.1 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème C4.46 (d'Alembert-Gauß)

Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$. Alors P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Théorème C4.47 (d'Alembert-Gauß)

Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.

Corollaire C4.48

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme

$$P = a_n(X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_n),$$

où les scalaires α_k sont les racines de P comptées avec multiplicités, et a_n son coefficient dominant.

Corollaire C4.49

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme unitaire et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ses racines complexes. Alors

(i) $a_0 = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k$,

(ii) $a_{n-1} = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$,

Théorème C4.50 (Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$)

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n admet n racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leurs multiplicités.

Théorème C4.51

Soit $A, B \in \mathbb{C}[X]$. Alors

$$A \mid B \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{C},\ \nu_\alpha(A) \leqslant \nu_\alpha(B).$$

Proposition C4.52

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}).$$

4.2 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème C4.53

Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Théorème C4.54 (Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors P peut s'écrire sous la forme

$$P = a \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k) \prod_{\ell=1}^{s} (X^2 + b_\ell X + c_\ell),$$

avec

- $a \in \mathbb{R}^*$ le coefficient dominant de P (sauf si $P = 0$; dans ce cas $a = 0$),
- $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ les racines réelles de P, non nécessairement distinctes,
- $(b_1, c_1), \ldots, (b_s, c_s) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant s$, on ait $\Delta_\ell = b_\ell^2 - 4c_\ell < 0$.

Objectifs

- Détermination du degré d'un polynôme.
- Montrer qu'un polynôme est nul ou que deux polynômes sont égaux.
- Calcul du reste dans la division euclidienne de deux polynômes.
- Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles.