Programme de colle 17 : du 02/02 au 06/02

Dénombrement

- Cadre théorique : ensembles finis, cardinal.
- Propriétés : cardinal d'une partie (cas d'égalité), union disjointe, produit cartésien, union de deux parties (formule du crible).
- Principes de dénombrement : principes des bergers, des tiroirs.
- Dénombrement de p-listes, p-arrangements, p-ermutations, p-combinaisons.
- Dénombrement des applications de E dans F, des injections de E dans F, des applications strictement croissantes, des parties à p éléments d'un ensemble fini.
- Interprétation combinatoire des formules sur les coefficients binomiaux.

Exercices abordés dans le TD E1 : 3, 4, 5, 7, 9, 10.

Calcul matriciel

- Matrices, opérations matricielles : somme, multiplication externe, produit : anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Matrices particulières (lignes/colonnes, matrice nulle, identité, matrices élémentaires, diagonales, triangulaires supérieures/inférieures).
- Stabilités (par produit) des ensembles de matrices diagonales/triangulaires.
- Calculs de puissances, formules dans le cas de matrices qui commutent.
- Transposée, propriétés, matrices symétriques, antisymétriques.
- Trace, linéarité, trace d'un produit de matrices.
- Matrices inversibles : définition, groupe des inversibles, inverse d'une matrice triangulaire, diagonale, transposée.
- Caractérisations par le rang, les solutions d'un système (homogène ou non).
- Matrices d'opérations élémentaires, algorithme de Gauß-Jordan.
- Rang (nombre de pivots), matrices équivalentes, caractérisation par équivalence à J_r.

Exercices abordés dans le TD D2 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 16.

Questions de cours

➢ Détermination du nombre d'anagrammes d'un mot (au choix de l'examinateur).
➢ Détermination du nombre de distributions possibles de 30 cadeaux (identiques) à 20 personnes (exo E1.9).
➢ Associativité du produit matriciel.
➢ Les matrices triangulaires supérieures (ou supérieures strictes) sont stables par produit.
➢ Toute matrice se décompose de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
➢ $(AB)^\intercal = B^\intercal A^\intercal$.
➢ $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Remarques

- Les objectifs du calcul matriciel ont été annoncés ; calculs de puissances, stabilités, polynômes annulateurs, diagonalisation (ces derniers sans les nommer) : les méthodes ne doivent pas surprendre.
- En dénombrement, la politique des jurys de concours est d'accepter les raisonnements corrects même s'il ne sont pas nécessairement d'un formalisme absolu. Par contre, les arguments doivent être clairement identifiés pour justifier les ingrédients de chaque formule (somme, produit, puissance, factorielle, coefficient binomial...).
- En plus du savoir-faire, il est important de savoir énoncer les définitions des notions ou les théorèmes employés.

Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.

Bonne semaine de colle !