Formules de travail :

- **Travail encadré en classe.**
- **Travail en autonomie complète, comme un DM non ramassé.**
- **Travail en simulation d'épreuve en temps limité : compter 2 heures maximum.**
  - ➢ **non rendu,**
  - ➢ **rendu après auto-correction (immédiate), annotations dans une couleur remarquable,**
  - ➢ **rendu sans auto-correction.**

Problème 1 **Fonctions convexes**

A Calcul préliminaire

1. Soit $x < y < z$ trois nombres réels. On pose $\lambda = \dfrac{z-y}{z-x}$. Montrer que $\lambda \in]0,1[$ et que $y = \lambda x + (1-\lambda)z$.

B Le vif du sujet

Soit M_1 et M_2 d'abscisses respectives x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$ deux points de l'axe (Ox). Tout point du segment $[M_1M_2]$ aura pour abscisse $x \in [x_1, x_2]$. D'après le calcul préliminaire, cette abscisse peut être exprimée comme $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ avec $\lambda \in [0,1]$. Par exemple, pour $\lambda = 1$, on obtient le point M_1, pour $\lambda = 0$, on obtient le point M_2 et pour $\lambda = 1/2$, on obtient le milieu du segment $[M_1M_2]$. Ainsi, on peut décrire le segment $[x_1, x_2]$ comme l'ensemble des $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ pour $\lambda \in [0,1]$.

Définition 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est ***convexe*** *sur I lorsque*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

À l'inverse, on dit que f est ***concave*** *lorsque*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

2. Montrer que f est convexe si et seulement si l'arc de $\mathcal{C}_f$ compris entre M_1 d'abscisse x_1 et M_2 d'abscisse x_2 est situé en dessous du segment $[M_1M_2]$.
3. Montrer que f est convexe et concave si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est une droite affine.
4. Montrer que f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.
5. Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier. Montrer que si f est convexe, alors pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, on a

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \ldots \lambda_n f(x_n).$$

6. (a) Soit f convexe et soit $\alpha < \beta < \gamma$. Soit λ tel que $\beta = \lambda\alpha + (1-\lambda)\gamma$ (voir résultat préliminaire). Montrer les trois inégalités suivantes.

$$\begin{aligned} f(\gamma) - f(\beta) &\geqslant \lambda(f(\gamma) - f(\alpha)) && (1) \\ f(\beta) - f(\alpha) &\leqslant (1-\lambda)(f(\gamma) - f(\alpha)) && (2) \\ \lambda(f(\beta) - f(\alpha)) &\leqslant (1-\lambda)(f(\gamma) - f(\beta)) && (3) \end{aligned}$$

   (b) Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction

$$\begin{array}{rcl} \Phi_a \,:\, I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

   est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

7. (a) Soit P, Q et R trois assertions. Montrer que si on a $\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ R \Rightarrow P \end{cases}$, alors on a P, Q et R équivalentes entre elles.
   (b) Rappeler l'équation de la tangente en a à la courbe $\mathcal{C}_f$.
   (c) On suppose que f est dérivable. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes.
      (i) f est convexe.
      (ii) f' est croissante.
      (iii) La courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes.
8. Supposons f deux fois dérivable (*i.e.* dérivable et telle que f' soit dérivable). Montrer que f est convexe si et seulement si f'' est positive.