Problème 1 **Fonctions convexes**

A Calcul préliminaire

1. Soit $x < y < z$ trois nombres réels. On pose $\lambda = \dfrac{z-y}{z-x}$.

   $y > x$ donc $z - y < z - x$. Et $z - x > 0$. Donc $\boxed{\dfrac{z-y}{z-x} < 1}$. De plus $z - y > 0$ donc $\boxed{\dfrac{z-y}{z-x} > 0}$.

   Et $\lambda x + (1-\lambda)z = \dfrac{z-y}{z-x}x + \left(1 - \dfrac{z-y}{z-x}\right)z = \dfrac{z-y}{z-x}x + \dfrac{y-x}{z-x}z = \dfrac{zx - yx + yz - xz}{z-x} = \boxed{y}$.

B Le vif du sujet

On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

2. Les coordonnées de M_1 et M_2 sont $M_1(x_1, f(x_1))$ et $M_2(x_2, f(x_2))$.

   Pour tout $x \in [x_1, x_2]$, on écrit $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ avec $\lambda = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$. Alors
   - le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}_f$ a pour coordonnées $(x, f(x))$
   - si on note (x, y) les coordonnées du point d'abscisse x du segment $[M_1M_2]$, par une relation de Thalès, on a $\lambda = \dfrac{f(x_2) - y}{f(x_2) - f(x_1)}$ et donc $y = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.

   Ainsi : f est convexe si et seulement si $f(x) \leqslant y$,

   $\boxed{\text{si et seulement si l'arc de } \mathcal{C}_f \text{ compris entre } M_1 \text{ et } M_2 \text{ est situé sous le segment } [M_1M_2]}$.

3. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f est convexe et concave.

   Pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, considérons les points M_1 et M_2 d'abscisses $-n$ et n. L'arc de $\mathcal{C}_f$ qu'ils encadrent est en dessous et au-dessus du segment $[M_1M_2]$ donc l'arc de la courbe et le segment sont confondus. Pour tout n la partie de la courbe comprise entre $x = -n$ et $x = n$ est rectiligne, donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est une droite}}$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que f est affine. Alors $\exists a, b \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

   Alors $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = a(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + b$

   et $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = \lambda(ax_1 + b) + (1-\lambda)(ax_2 + b) = a(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + \underbrace{b(\lambda + 1 - \lambda)}_{b}$.

   Ceci montre que $\boxed{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)}$.

4. $$\begin{aligned} f \text{ est concave} &\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I \text{ et } \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \\ &\Leftrightarrow -f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant -\left(\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)\right) \\ &\Leftrightarrow -f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda(-f(x_1)) + (1-\lambda)(-f(x_2)) \\ &\Leftrightarrow \boxed{-f \text{ est convexe}}. \end{aligned}$$

5. Supposons f convexe. Procédons par récurrence pour montrer pour tout $n \geqslant 2$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:

   $$\text{pour tous } x_1, \dots, x_n \in I \text{ et } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \text{ on a } f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

$\boxed{\text{Init.}}$ pour $n = 2$, c'est exactement la définition de la convexité (avec $\lambda = \lambda_1$ et donc $1 - \lambda = \lambda_2$.

$\boxed{\text{Hér.}}$ Soit $n \geqslant 2$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
Soit $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$.

- Posons, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$.

  Ainsi, $\mu_1 + \dots + \mu_n = 1$. Donc d'après l'hypothèse de récurrence, $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i)$.

  Si on note $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$, cela s'écrit $f(X) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i)$.

  Par ailleurs, soit $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$; alors $1 - \lambda = \lambda_{n+1}$.

  On applique la définition de la convexité entre X et x_{n+1} :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + (1-\lambda)x_{n+1}) &\leqslant \lambda f(X) + (1-\lambda) f(x_{n+1}) \\ &\leqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

  Ainsi, $\boxed{f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).}$

6. (a) Soit $\alpha < \beta < \gamma$. D'après le résultat préliminaire, en posant $\lambda = \dfrac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}$, $\beta = \lambda\alpha + (1-\lambda)\gamma$. Par convexité, $f(\beta) \leqslant \lambda f(\alpha) + (1-\lambda) f(\gamma) \quad (*)$
et donc $f(\beta) - f(\gamma) \leqslant \lambda f(\alpha) - \lambda f(\gamma)$.
Finalement, $\boxed{f(\gamma) - f(\beta) \geqslant \lambda(f(\gamma) - f(\alpha))}$.
De $(*)$, on peut aussi obtenir $\boxed{f(\beta) - f(\alpha) \leqslant (1-\lambda)(f(\gamma) - f(\alpha))}$.
De $(*)$, on tire aussi $(\lambda + (1-\lambda)) f(\beta) \leqslant \lambda f(\alpha) + (1-\lambda) f(\gamma)$
et donc $\boxed{\lambda(f(\beta) - f(\alpha)) \leqslant (1-\lambda)(f(\gamma) - f(\beta))}$.

   (b) Soit $a \in I$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f convexe. Soit x, y dans $I \setminus \{a\}$ tels que $x < y$.

1^er^ cas : $x < y < a$.
D'après l'inégalité (1), avec $\lambda = \dfrac{a - y}{a - x}$, on a $f(a) - f(y) \geqslant \lambda(f(a) - f(x))$,
soit $f(a) - f(y) \geqslant \dfrac{a - y}{a - x}(f(a) - f(x))$.
Finalement, $\dfrac{f(y) - f(a)}{y - a} \geqslant \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, c'est à dire $\boxed{\Phi_a(x) \leqslant \Phi_a(y)}$.

2^e^ cas : $x < a < y$.
D'après l'inégalité (3), avec $\lambda = \dfrac{y - a}{y - x}$, on a $\lambda(f(a) - f(x)) \leqslant (1-\lambda)(f(y) - f(a))$,
soit $\dfrac{y - a}{y - x}(f(a) - f(x)) \leqslant \dfrac{a - x}{y - x}(f(y) - f(a))$.
Finalement, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \dfrac{f(y) - f(a)}{y - a}$, c'est à dire $\boxed{\Phi_a(x) \leqslant \Phi_a(y)}$.

3$^{\text{e}}$ cas : $a < x < y$.

D'après l'inégalité (2), avec $\lambda = \dfrac{y-x}{y-a}$, on a $f(x) - f(a) \leqslant (1-\lambda)(f(y) - f(a))$,

soit $f(x) - f(a) \leqslant \dfrac{x-a}{y-a}(f(y) - f(a))$.

Finalement, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \dfrac{f(y)-f(a)}{y-a}$, c'est à dire $\boxed{\Phi_a(x) \leqslant \Phi_a(y)}$.

Ceci montre que $\boxed{\Phi_a \text{ est croissante}}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons Φ_a croissante pour tout $a \in I$.

Soit $x_1, x_2 \in I$. On suppose, quitte à les renuméroter, que $x_1 < x_2$. Soit $\lambda \in [0,1]$. On pose $t = \lambda x + (1-\lambda)y \in [x,y]$, ainsi $\lambda = \dfrac{y-t}{y-x}$.

La croissance de la fonction Φ_y donne $\Phi_y(x) \leqslant \Phi_y(t)$, d'où $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant \dfrac{f(t)-f(y)}{t-y}$, soit $\lambda(f(x) - f(y)) \geqslant f(t) - f(y)$. D'où $f(t) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, ce qui montre que $\boxed{f \text{ est convexe}}$.

7. (a) Supposons qu'on a $\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ R \Rightarrow P \end{cases}$.

On a $P \Rightarrow Q$ et comme $Q \Rightarrow R$ et $R \Rightarrow P$, on a aussi $Q \Rightarrow P$.

Ceci montre $P \Leftrightarrow Q$ et on montre de même que $Q \Leftrightarrow R$ et $R \Leftrightarrow P$.

Ainsi $\boxed{P, Q \text{ et } R \text{ sont équivalentes}}$.

(b) La tangente en a à la courbe $\mathcal{C}_f$ a pour équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

(c) On suppose que f est dérivable.

$\boxed{\text{(i)}\Rightarrow\text{(ii)}}$ Supposons f convexe. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Pour tout $x \in I$, on a, par croissance de Φ_x, $\dfrac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$. Par passage à la limite $x \to a$, cela donne $f'(a) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

On a aussi, en faisant tendre x vers b, $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} \leqslant f'(b)$.

Ces deux inégalités montrent que $f'(a) \leqslant f'(b)$, ce qui montre que $\boxed{f' \text{ est croissante}}$.

$\boxed{\text{(ii)}\Rightarrow\text{(iii)}}$ On suppose f' croissante et pour tout a, on note (T_a) la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a. Étudions $g(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$.

g est dérivable et pour tout $x \in I$, $g'(x) = f'(x) - f'(a)$. Or f' est croissante, d'où le tableau de variations suivant.

x		a	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

g est donc toujours positive ou nulle et donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } (T_a)}$.

$\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ On suppose que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes.
Soit $x_1, x_2 \in I$ et $\lambda \in [0,1]$.
On note M_1 le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_1 et M_2 le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_2.
Soit $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et P le point de $[M_1M_2]$ d'abscisse x.
Ainsi $x_P = x$ et $y_P = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.
Or la courbe est au-dessus de la tangente en M. D'où $\begin{cases} f(x_1) \geqslant f'(x)(x_1 - x) + f(x) \\ f(x_2) \geqslant f'(x)(x_2 - x) + f(x) \end{cases}$.

Donc
$$\begin{aligned} y_P &\geqslant \lambda[f'(x)(x_1 - x) + f(x)] + (1-\lambda)[f'(x)(x_2 - x) + f(x)] \\ &\geqslant f(x) + f'(x)(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x) \end{aligned}$$

Comme $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, on a finalement $y_P = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \geqslant f(x)$ ce qui montre que $\boxed{f \text{ est convexe}}$.

8. Supposons f deux fois dérivable. Alors f' est dérivable et donc f' est croissante si et seulement si f'' est positive.
Donc $\boxed{f \text{ est convexe si et seulement si } f'' \text{ est positive}}$.