DEVOIR MAISON N° 15

**La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.**
**Les résultats devront être encadrés.**
**La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.**
**Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.**

**Problème 1**

L'objet de ce problème est l'étude d'une famille de polynômes. On les utilisera en partie C pour évaluer la (très célèbre) limite d'une suite introduite en partie B.

## A Une famille de polynômes

On définit la suite de polynômes $(T_n)$ de la manière suivante :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1. Vérifier que vous obtenez bien $T_2 = 2X^2 - 1$ puis exprimer $T_3$ et $T_4$.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de $T_n$ est $n$ et son coefficient dominant est $2^{n-1}$.
   (b) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $a_n = T_n(0)$.
   (c) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $b_n = T_n(1)$.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\forall t \in \mathbb{R},\, T_n(\cos(t)) = \cos(nt). \tag{E}$$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n$ est l'unique polynôme $P$ vérifiant
$$\forall t \in \mathbb{R},\, P(\cos(t)) = \cos(nt).$$
   (c) Montrer que pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, $T_k \circ T_n = T_n \circ T_k = T_{nk}$.
   (d) En déduire l'expression du polynôme $T_6$.
4. (a) Retrouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les valeurs de $a_n$ et $b_n$ à l'aide de la relation (E).
   (b) À l'aide de la relation (E), déterminer la valeur de $T_n'(1)$.
5. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R},\, T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$
   En déduire, en fonction de $n$, la parité du polynôme $T_n$.
6. Dans cette question, on considère $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, soit $x_k = \cos\left(\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right)$. Montrer que $T_n(x_k) = 0$.
   (b) En déduire l'ensemble des racines de $T_n$ et justifier qu'elles sont toutes comprises dans l'intervalle $[-1, 1]$.
   (c) Donner la factorisation de $T_n$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
   (d) Déterminer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$.
   (e) Si $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k X^k$, justifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = -c_{n-1}$. En déduire la valeur de cette somme.

## B Deux sommes

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

   (a) Déterminer $a$ et $b$ tels que $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.

   (c) En déduire que $(S_n)$ est une suite convergente. On note $\ell$ sa limite.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme $I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $S_{2n}$ en fonction de $S_n$ et $I_n$. Vérifier cette formule avec $n = 3$.

   (b) Montrer que $(I_n)$ est convergente. On note $\ell'$ sa limite. Donner une relation entre $\ell$ et $\ell'$.

## C Calcul de limite

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on rappelle la notation $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$.

9. Une formule générale de dérivation : soit $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions dérivables. Montrer que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{k=1}^{n}\left(f_k' \times \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} f_i\right).$$

10. Soit $I$ un intervalle ne contenant aucun des $x_k$. Montrer que

$$\forall x \in I, \quad \frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}.$$

11. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)} = n^2.$$

12. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $1 - \cos(t) = 2\sin^2(t/2)$.

    (b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\tan^2(t)$ à l'aide de la seule fonction $\sin^2$ et des opérations usuelles.

    (c) En déduire les valeurs de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)}$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)}$.

13. (a) Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, montrer que $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.

    (b) Donner alors un encadrement de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)^2}$ puis de la somme $I_n$ définie en partie B.

    (c) En déduire la valeur de $\ell'$.

    (d) Montrer finalement que $\ell = \frac{\pi^2}{6}$.