

# CHAPITRE B4

## CONVEXITÉ

### Objectifs

- Inégalité de convexité.
- Interprétation géométrique de la convexité.
- Caractérisation de la convexité suivant la régularité de la fonction.

## 1 Généralités

### Définition B4.1

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est **convexe** sur  $I$  lorsque

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

À l'inverse, on dit que  $f$  est **concave** lorsque

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

### Proposition B4.2

Avec les notations ci-dessus :

- $f$  est convexe et concave si et seulement si  $\mathcal{C}_f$  est une droite affine.
- $f$  est concave si et seulement si  $-f$  est convexe.


**Proposition B4.3 (Inégalité de Jensen)**

Soit  $n \geq 2$  un nombre entier. Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe, alors pour tous  $x_1, \dots, x_n \in I$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$  tels que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ , on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

## 2 Caractérisations

**Proposition B4.4 (Croissance des pentes)**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour tout  $a \in I$ , on définit la fonction pente

$$\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- (i)  $f$  est convexe si et seulement si pour tout  $a \in I$ ,  $\tau_a$  est croissante sur  $I \setminus \{a\}$ .
- (ii) Si  $f$  est convexe, alors pour tous  $a, b, c \in I$  tels que  $a < b < c$ ,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

**Théorème B4.5**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $f$  est convexe.
- (ii)  $f'$  est croissante sur  $I$ .
- (iii)  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de ses tangentes.

**Théorème B4.6**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . Alors

- $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si  $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$ ,
- $f$  est concave sur  $I$  si et seulement si  $\forall x \in I, f''(x) \leq 0$ .

**Définition B4.7 (point d'inflexion)**

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $a \in I$ . On dit que  $\mathcal{C}_f$  admet un **point d'inflexion** en  $a$  lorsqu'il existe  $\eta > 0$  tel que  $f$  ait des convexités contraires sur les deux intervalles  $]a - \eta, a[$  et  $]a, a + \eta[$ .

**Remarque.** En particulier, un tel point est nécessairement un point intérieur de  $I$ .

**Théorème B4.8**

Avec les mêmes notations, on suppose que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et que  $f''$  s'annule et change de signe en  $a$ , alors  $\mathcal{C}_f$  admet un point d'inflexion en  $a$ .

**Théorème B4.9**

Soit  $I$  un intervalle ouvert et  $a$  un point intérieur de  $I$ . On suppose que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- Si  $f$  est convexe sur  $I$  :  $f'(a) = 0$  si et seulement si  $f$  admet un minimum global en  $a$ .
- Si  $f$  est concave sur  $I$  :  $f'(a) = 0$  si et seulement si  $f$  admet un maximum global en  $a$ .

**Méthodes**

- Établir la convexité d'une fonction.
- Utiliser les inégalités de convexité.
- Utiliser la comparaison de  $\mathcal{C}_f$  avec ses tangentes ou ses cordes.